



Centro de Estudios Económicos

[www.colmex.mx](http://www.colmex.mx)

El Colegio de México, A.C.

***Serie documentos de trabajo***

Formalismo canónico en economía  
aplicado a teoría de portafolios

José Miguel Torres  
El Colegio de México

DOCUMENTO DE TRABAJO  
Núm. II – 2013

# Formalismo Canónico en Economía Aplicado a Teoría de Portafolios

José Miguel Torres\*

21 de enero de 2013

## Abstract

Teoría de portafolios sigue siendo de lo más relevante: la selección de activos para el ahorro es una de las decisiones económicas más importantes. Las decisiones óptimas de los inversionistas de corto plazo no tienen por qué coincidir con las de los de largo plazo, y a principios de los 1970s Merton desarrolló un marco general para entender los efectos de oportunidades de inversión cambiantes sobre la demanda óptima de activos.

Por mucho tiempo ha existido una gran brecha entre los desarrollos teóricos y el trabajo empírico, siendo una de las razones principales que resolver el modelo de Merton es muy difícil. Aunque la situación ha empezado a cambiar recientemente gracias a avances en computación y el descubrimiento de soluciones analíticas exactas, estas últimas todavía son muy escasas. En este trabajo desarrollamos una novel aplicando ideas del formalismo canónico de física. En particular, usamos la fórmula de Feynman-Kac para obtener una solución que nos permite hacer estática comparativa muy precisa. Además, empleamos la adjunta de la misma fórmula para identificar la distribución de probabilidad de los rendimientos que, a su vez, puede ser usada para estimar los procesos de difusión (con brincos) involucrados. La identificación emplea transformadas de Fourier.

---

\*Este trabajo está basado en un capítulo de mi tesis doctoral en la Universidad de Harvard, terminada a fines de 2007. La generalización de algunos de los resultados originales, la demostración de algunos resultados que no se habían probado originalmente, el significativamente más alto rigor técnico, y, más importante, el descubrimiento de un significativo contenido económico de las herramientas técnicas empleadas en este trabajo, deben mucho a mi intensa interacción con Wolfgang Bietenholz, Jens Erler, y Alberto Guijosa, del Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM; con Daniel Olguín, del Cinvestav del IPN; con Sergio Hojman, de la Universidad de Chile; y a numerosas conversaciones con Carlos Reyes, de El Colegio de México. Por supuesto, yo permanezco como el único responsable de cualquier error u omisión.

# 1 Introducción

En su toma de protesta como Presidente de la Asociación Americana de Finanzas (AFA, por sus siglas en inglés), Campbell (2006) concluyó mencionando que el potencial de los economistas para promover la “higiene financiera” para aumentar el bienestar es inspirador. La selección de activos para el ahorro es una de las decisiones económicas más importantes, y por esta razón teoría de portafolios continúa siendo de la mayor importancia.

Es generalmente aceptado que la teoría moderna de finanzas empezó con los trabajos de selección de portafolios de Markowitz (1952) y Roy (1952). Aunque hoy nos parece de lo más común, en 1952 el análisis de elección de portafolios era un territorio básicamente inexplorado, incluso entre los asesores de inversiones profesionales. De hecho, es famosa la anécdota de que en la defensa de la tesis doctoral de Markowitz, Milton Friedman, que estaba en el comité examinador, le dijo: “Harry, no veo ningún error matemático aquí, pero tengo una objeción. Esta no es una tesis en economía, y no te podemos dar un doctorado en economía por una tesis que no es en economía. No es matemáticas, no es economía, ni siquiera es administración de empresas.” (Bernstein (2005)). Aún más, Arrow (1951) menciona que apenas veinte años antes, Fisher (1930) todavía dudaba de la viabilidad de una teoría satisfactoria de comportamiento racional bajo incertidumbre.

Aunque Markowitz y Roy mostraron cómo deberíamos elegir activos si sólo nos preocupara el rendimiento esperado y el riesgo (medido por la varianza) de los rendimientos de los portafolios para un solo periodo, sus ideas eran imposibles de aplicar. Para empezar, para analizar  $N$  activos, era necesario estimar  $N$  medias y  $\frac{N(N+1)}{2}$  covarianzas. Después, había que identificar aquellos portafolios con los mayores rendimientos esperados para un nivel de riesgo dado. Por último, ¿Cuál de todos estos portafolios debería elegir el inversionista?

El tercero de los problemas anteriores fue resuelto por Tobin (1958) con su *Teorema de Separación*: el proceso de encontrar el portafolio de activos riesgosos más eficiente está totalmente separado de la decisión de cómo dividir el portafolio total entre activos riesgosos y sin riesgo. Cinco años después, Sharpe (1961) dio otro gran paso para cerrar la brecha entre las ideas de Markowitz y las aplicaciones del mundo real: el “modelo diagonal.” Mejor conocido como el “modelo de índice único,” la idea central del modelo diagonal es sustituir las covarianzas entre cada par de activos por las correlaciones entre cada activo y algún factor subyacente común.

El reconocimiento de que los portafolios óptimos de los inversionistas de corto plazo no tienen por qué coincidir con los de los inversionistas de largo plazo se remonta a mediados de los 1960s, cuando, narran Campbell y Viceira (2002), Samuelson (1963, 1969), Mossin (1968), Merton (1969), y Fama (1970) describieron por primera vez las condiciones bajo las cuales las decisiones de ambos tipos de inversionistas coinciden. En Stiglitz (1970) y Rubinstein (1976a, 1976b) validaron teóricamente la conjetura de Modigliani y Sutch (1966) de que para los inversionistas de largo plazo, los activos seguros son los bonos de largo plazo. Mayers (1972) y Fama y Schwert (1977) estudiaron los efectos

del capital humano en la elección de portafolios. Y fue el trabajo seminal de Merton (1971, 1973) el que proporcionó un marco general para entender los efectos de oportunidades de inversión dinámicas sobre la demanda de activos para inversionistas de largo plazo.

Rubinstein (1976b) y Breeden (1979) ligaron el trabajo de Merton con las decisiones de consumo, una idea que ha tenido un impacto muy importante en macroeconomía gracias al trabajo de Lucas (1978), Grossman y Shiller (1981), Shiller (1982), Hansen y Singleton (1983), y Mehra y Prescott (1985).

Por mucho tiempo ha existido una brecha enorme entre los desarrollos teóricos anteriores y el trabajo empírico sobre elección de portafolios para el largo plazo. De hecho, Campbell y Viceira (2002) notan que en la mayoría de los cursos de las maestrías en administración todavía se enseña el análisis mediarianza como si fuera un enfoque universal para elección de portafolios.

Una razón importante para esta lamentable situación es que resolver el modelo de Merton es muy difícil. Afortunadamente, recientemente la situación ha empezado a cambiar, gracias a (1) avances en computación y métodos numéricos, (2) el desarrollo de soluciones analíticas aproximadas, y (3) el descubrimiento de soluciones analíticas exactas. Estas últimas todavía son muy pocas, y en este trabajo desarrollamos una nueva aplicando ideas del formalismo canónico (de física).

En particular, usamos la fórmula de Feynman-Kac para obtener una solución analítica novel que nos permite hacer estática comparativa muy precisa y dar una caracterización clara del portafolio. Además, empleamos la adjunta de la misma fórmula para identificar la distribución de probabilidad de los rendimientos que, a su vez, puede ser usada para estimar procesos de difusión con brincos usando el Método Generalizado de Momentos (GMM, por sus siglas en inglés). En esta identificación juegan un papel crucial las transformadas de Fourier.

Es importante mencionar que este trabajo está basado en el capítulo “Exchange Rate and Systemic Risks” de mi tesis doctoral en la Universidad de Harvard, terminada a fines de 2007. A diferencia del trabajo original, enfocado en una caracterización empírica de los mercados internacionales de capitales, aquí hacemos énfasis en la metodología ahí empleada. Por tanto, sería perfectamente válido pensar en este trabajo como una labor de reconocimiento de las bases sobre las que descansa Torres (2007). Pero, es muy importante aclarar, no se trata de una mera tarea de validación, sino de una búsqueda de mejor entendimiento: después de todo, el establecimiento del cálculo estocástico como una disciplina académica sólida es muy anterior a 2007.

Acudimos a fuentes originales en física y matemáticas, empezando por la misma tesis de Feynman (Feynman (1942)), lo que nos permitió no solamente validar y elevar significativamente el rigor técnico de Torres (2007), sino también desarrollar intuición sobre esta poderosa fórmula que permite conectar teoría de la probabilidad con ecuaciones diferenciales parciales. No sorpresivamente, los beneficios no se hicieron esperar: sólo por dar un ejemplo, esta intuición nos permitió descubrir una interesante conexión entre las matemáticas de las finanzas en tiempo continuo y las del modelo (de crecimiento) de Ramsey (1928).

Es muy importante dejar bien claro que no reclamamos que nuestro trabajo

no tenga precedentes. De hecho, en 2001, en la inauguración de las *Princeton Lectures on Finance*, Stephen Ross aludió, aunque muy brevemente, a la conexión entre valuación neutral-al-riesgo y mecánica cuántica (ver capítulo 1 de Ross (2005)). Aún más, sabemos de primera mano que mucho de este conocimiento flota por “todos” lados, especialmente entre los denominados *quants*. Sin embargo, hasta donde tenemos entendido, prácticamente no hay nada documentado en la literatura de economía financiera, y nos gustaría pensar que nuestra principal contribución es ayudar a detonar el estudio y uso sistemático de estas avanzadas herramientas técnicas en economía y finanzas. A propósito, y como mencionamos al inicio de este trabajo, detrás de nuestros resultados se encuentra una larga e intensa interacción directa con físicos que amablemente han compartido con nosotros su entendimiento físico de las fórmulas relevantes, y que entonces nosotros nos hemos dedicado a adecuar a economía y finanzas.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En la segunda sección hacemos una breve exposición del formalismo canónico y hacemos explícita su conexión con la economía. El modelo es descrito y resuelto en la sección tres, en donde también lo resolvemos analíticamente y desarrollamos un método para estimar los procesos de difusión de los precios de los activos (el lector interesado puede consultar Torres (2007) para una implementación del modelo con datos reales). En la sección 4 hacemos algunas observaciones finales, antes de repasar algunos conceptos básicos de análisis de Fourier en el apéndice.

## 2 Formalismo canónico

La base matemática de nuestro trabajo es la fórmula de Feynman-Kac, que nos permite calcular valores esperados resolviendo ecuaciones diferenciales.

**Teorema (de Feynman-Kac).** Si  $x$  es el proceso browniano  $dx = \alpha dt + \sigma dz$ , entonces

$$u(x, t) = E \left[ e^{\int_t^T ds V(x(s), s)} \Phi(x(T)) \mid x(t) = x \right] \quad (1)$$

resuelve

$$0 = u_t + \mathcal{L}u + V(x, t)u \text{ si } t < T \quad (2)$$

$$u(x(T)) = \Phi(x(T))$$

donde  $\mathcal{L}$ , el generador infinitesimal del proceso de difusión, está dado por el operador

$$\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (3)$$

**Prueba.**<sup>1</sup> Sean  $f_1(s) \equiv e^{\int_t^s d\tau V(x(\tau), \tau)}$  y  $f_2(s) \equiv u(x(s), s)$ . Entonces, por el lema de Ito,  $df_1 = f_1 V ds$  y

$$df_2 = (u_t + \mathcal{L}u) ds + \sigma u_x dz = -V u ds + \sigma u_x dz = -V f_2 ds + \sigma u_x dz$$

---

<sup>1</sup>Aunque siguen siendo relativamente raras en la literatura económica, estas herramientas son de uso cotidiano en cálculo estocástico y ésta es una adaptación propia de la prueba usada en el salón de clases por el Profesor Robert Kohn, del Courant Institute of Mathematical Sciences, en su curso “Partial Differential Equations for Finance” en la primavera de 2003.

Además,  $d(f_1 f_2) = f_1 df_2 + f_2 df_1 + df_1 df_2$ :

$$\Rightarrow d(f_1 f_2) = \{-f_1 f_2 V ds + \sigma f_1 u_x dz\} + u f_1 V ds + df_1 df_2$$

$\Rightarrow E[f_1(T) f_2(T) - f_1(t) f_2(t)] = 0$  (porque  $f_2 = u$ ,  $E[dz] = 0$ , y  $df_1 df_2 = 0$ )

$$\Rightarrow E[f_1(T) f_2(T)] = f_1(t) f_2(t)$$

$$\Rightarrow E\left[e^{\int_t^T ds V(x(s), s)} \Phi(x(T))\right] = e^{\int_t^T ds V(x(s), s)} u(x(t), t) = u(x(t), t) \blacksquare$$

Además,  $\mathcal{L}^*$ , la adjunta de  $\mathcal{L}$ , nos permite recuperar la distribución de probabilidad de  $x$ , que vamos a denotar por  $f$ . En particular,  $f$  resuelve  $0 = f_t - \mathcal{L}^* f$ .

**Definición.** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert y  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  una transformación lineal acotada. Si el operador lineal  $T^*$  satisface:

1.  $(Tf, g) = (f, T^*g) \forall f, g \in H$ , donde  $(\cdot, \cdot)$  denota un producto interior
2.  $\|T\| = \|T^*\|$ , donde  $\|T\|$  es la norma de  $T$
3.  $(T^*)^* = T$

entonces decimos que  $T^*$  es la adjunta de  $T$ .  $\blacksquare$

En específico, la adjunta de  $\mathcal{L}$  es

$$-\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (4)$$

**Teorema.** La distribución de probabilidad de  $x$ , que vamos a denominar  $f$ , resuelve la ecuación  $0 = f_t - \mathcal{L}^* f$ .

**Prueba.**<sup>2</sup> Definamos la retícula  $x_i = i\delta$  y  $t_j = j\Delta t$ , y consideremos el siguiente modelo trinomial:

$$p_{jk}(t) = \Pr\{X(t + \Delta t) = x_k | X(t) = x_j\} = \begin{cases} r(t, x_j) \frac{\Delta t}{\delta^2} & \text{para } k = j + 1 \\ 1 - r(t, x_j) \frac{\Delta t}{\delta^2} - s(t, x_j) \frac{\Delta t}{\delta^2} & \text{para } k = j \\ s(t, x_j) \frac{\Delta t}{\delta^2} & \text{para } k = j - 1 \end{cases}$$

para ciertas funciones no-negativas  $r$  y  $s$ .

Observemos lo siguiente:

1.  $E[\Delta x] = \delta \left(r \frac{\Delta t}{\delta^2}\right) + (-\delta) \left(s \frac{\Delta t}{\delta^2}\right) = \frac{r-s}{\delta} \Delta t \equiv \alpha \Delta t$
2. varianza  $[\Delta x] = \delta^2 \left(r \frac{\Delta t}{\delta^2}\right) + (-\delta)^2 \left(s \frac{\Delta t}{\delta^2}\right) = (r + s) \Delta t \equiv \sigma \Delta t$

Entonces, podemos pensar en  $x$  como el proceso browniano  $dx = \alpha dt + \sigma dz$ .

Si  $p_i(t) \equiv \Pr\{X(t) = x_i\}$ , entonces

$$p_i(t + \Delta t) = r(t, x_{i-1}) \frac{\Delta t}{\delta^2} p_{i-1}(t) + s(t, x_{i+1}) \frac{\Delta t}{\delta^2} p_{i+1}(t)$$

<sup>2</sup>Al igual que con el teorema de Feynman-Kac, esta prueba es un ejercicio clásico en los cursos de cálculo estocástico pero poco conocida en la literatura económica. Esta, es una prueba propia.

$$\begin{aligned}
& + \left( 1 - r(t, x_i) \frac{\Delta t}{\delta^2} - s(t, x_i) \frac{\Delta t}{\delta^2} \right) p_i(t) \\
\Rightarrow & \frac{p_i(t + \Delta t) - p_i(t)}{\Delta t} = \frac{2r(t, x_{i-1}) \pm s(t, x_{i-1})}{2\delta^2} p_{i-1}(t) \\
+ & \frac{2s(t, x_{i+1}) \pm r(t, x_{i+1})}{2\delta^2} p_{i+1}(t) - 2 \frac{r(t, x_i) + s(t, x_i)}{2\delta^2} p_i(t) \\
\Rightarrow & \frac{\Delta p_i(t)}{\Delta t} = - \frac{\alpha(t, x_{i+1}) p_{i+1}(t) - \alpha(t, x_{i-1}) p_{i-1}(t)}{2\delta} \\
+ & \frac{\sigma(t, x_{i+1}) p_{i+1}(t) - 2\sigma(t, x_i) p_i(t) + \sigma(t, x_{i-1}) p_{i-1}(t)}{2\delta^2} \\
\Rightarrow & \frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = - \frac{\partial(\alpha(t, x) p(t, x))}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\sigma(t, x) p(t, x))}{\partial x^2} \\
& = \mathcal{L}^* p(t, x) \blacksquare
\end{aligned}$$

Para ganar intuición, ahora consideremos el proceso  $\Delta x = \Delta z$  en un marco de tiempo discreto, y tomemos la trayectoria de  $x_t$  a  $x_T$   $\{\Delta x_s\}_{s=t+1}^T$ . Recordando que  $\Delta z \sim N(0, \Delta t)$ , la probabilidad de esta trayectoria es proporcional a

$$\prod_{s=t+1}^T e^{-\frac{(\Delta x_s)^2}{2\Delta t}} = e^{-\sum \frac{(\Delta x_s)^2}{2\Delta t}} = e^{-\sum \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\Delta x_s}{\Delta t}\right)^2}$$

donde  $\frac{\Delta x_s}{\Delta t}$  es una velocidad.

Este resultado sugiere que en tiempo continuo, la probabilidad de la trayectoria  $x(s)$  es proporcional a  $e^{-\int_t^T ds \frac{1}{2} \dot{x}^2}$ :

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= E \left[ e^{-\int_t^T ds [\frac{1}{2} \dot{x}^2 - V(x, s)]} \Phi(x(T)) | x(t) = x \right] \quad (5) \\
&\equiv E \left[ e^{-\int_t^T ds L(x, \dot{x}, s)} \Phi(x(T)) | x(t) = x \right]
\end{aligned}$$

En mecánica, el funcional  $L$  es conocido como el lagrangiano de la teoría, mientras que la integral  $I[x] \equiv \int_t^T ds L(x, \dot{x}, s)$  es llamada la acción. Normalmente es posible derivar las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico a partir de  $L$ , y la ventaja principal del formalismo lagrangiano es que nos permite derivar la existencia de cantidades conservadas a partir de principios de simetría. Una cantidad conservada de especial importancia es el hamiltoniano  $H$ , definido como  $(\dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L)$ .

El formalismo hamiltoniano nos permite describir el sistema dinámico usando ecuaciones diferenciales de primer orden para dos variables: la “coordenada” generalizada  $x$  y el “momento” generalizado  $p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ , que es el “conjugado canónico” de  $x$ .<sup>3</sup>

<sup>3</sup>En la actualidad mucho del trabajo en física de alta energía consiste en el estudio de las simetrías de los lagrangianos: con frecuencia, teoría de grupos, el lenguaje matemático de las simetrías, nos permite decir cosas interesantes y muy detalladas sobre algunos sistemas físicos incluso cuando no conocemos todos los detalles. El lector interesado puede consultar Georgi (1999).

Es importante notar que en economía estas matemáticas son menos extrañas de lo que parecen a primera vista. Por ejemplo, el modelo de Ramsey es el problema clásico que se puede resolver buscando la trayectoria (del capital físico) que optimiza una acción (la utilidad intertemporal del consumo). Esta trayectoria se implementa controlando el consumo.<sup>4</sup>

Pero no es en el área de Crecimiento donde el formalismo lagrangiano exhibe su mayor gloria en Economía. Después de todo, ¿Por qué podríamos estar interesados en considerar todas las trayectorias posibles del capital (o, equivalentemente, todas las posibilidades de consumo)?

En 1973 Black y Scholes calcularon la solución

$$xN(d_1) - ce^{r(t-t^*)}N(d_2) \quad (6)$$

para su fórmula

$$w_t = rw - rxw_x - \frac{1}{2}v^2x^2w_{xx} \quad (7)$$

donde  $x$  es el precio de una acción;  $w$  el precio de una opción *call* europea sobre ese activo;  $c$  y  $t^*$  son el precio de ejercicio y la fecha de vencimiento de la opción, respectivamente; y  $r$  es la tasa de interés (constante).

En contraste con la ecuación 6, la aplicación del teorema de Feynman-Kac a la ecuación de Black-Scholes arroja una fórmula con una bonita interpretación económica:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= E \left[ e^{\int_t^{t^*} ds(-r)} \max \{x(t^*) - c, 0\} \mid x(t) = x \right] \\ &= e^{-r(t^*-t)} E [\max \{x(t^*) - c, 0\} \mid x(t) = x] \end{aligned} \quad (8)$$

En español, el precio de la opción es el valor presente del valor esperado de su pago futuro  $\max \{x(t^*) - c, 0\}$ , donde la esperanza se calcula sobre todas las trayectorias posibles que puede seguir el precio de la acción entre  $t$  y  $t^*$ .

Mientras que en su trabajo original Black y Scholes sólo consideraron una tasa de interés constante, la fórmula de Feynman-Kac nos permite incorporar con facilidad tasas de interés variables. El lector cuidadoso seguro habrá observado que en la ecuación de Black y Scholes  $r$  juega el rol de la función  $V(x, t)$  de las ecuaciones 1 y 2. Por tanto, podemos considerar una tasa de interés variable  $r(x, t)$  que cambie no sólo con el paso del tiempo, sino además con el estado de la variable de estado  $x$ , en cuyo caso la ecuación 8 se convierte en

$$w(x, t) = E \left[ e^{-\int_t^{t^*} dsr(s)} \max \{x(t^*) - c, 0\} \mid x(t) = x \right] \quad (9)$$

que preserve la idea de que el precio de la opción no es más que el valor esperado descontado de su pago futuro.

La integral 5, incluyendo el caso particular 9, es una integral funcional, que no es una integral ordinaria, y esto plantea problemas especiales. A diferencia de las integrales “ordinarias,” no existen tablas del estilo de Gradshteyn y

<sup>4</sup>Un buen punto de partida para aprender el modelo de Ramsey es Barro y Sala-i-Martin (2003). El primer autor, por cierto, en los 1960 estudió física en Caltech con el mismo Richard Feynman (ver Barro (2003)).



Ryzhik (1980) (aunque si hay algunos libros con ciertos casos más o menos exóticos, como Grosche (1996)). Si bien en los salones de clases normalmente sólo aprendemos a calcular de manera explícita integrales gaussianas, resulta que esto típicamente es suficiente para construir expansiones perturbativas.

No es éste el lugar para describir con profundidad las conexiones entre mecánica cuántica y la llamada “valuación neutral-al-riesgo,” pero vale la pena mencionar que las “muchas” trayectorias que en física puede seguir un electrón de un lugar a otro, en finanzas se convierten en las “muchas” historias del precio del activo subyacente (como ya mencionamos en la introducción, hasta donde tengo entendido, el capítulo 1 de Ross (2005) contiene una de las pocas referencias explícitas (muy breve, por cierto) en la literatura de economía financiera a estas conexiones). Además, es importante mencionar que a pesar de sus éxitos en física, desde un punto de vista matemático la técnica de Feynman no es un objeto “bien definido,” problema cuya solución es uno de los siete “Problemas del Milenio” planteados por el Instituto de Matemáticas Clay (bajo la rúbrica “Teoría de Yang-Mills”).

En la siguiente sección vamos a desarrollar una solución analítica exacta para el modelo de Merton usando este formalismo canónico que acabamos de exponer. Aún más, también vamos a usar la adjunta de la fórmula de Feynman-Kac para esbozar una metodología que nos ayude a implementarlo empíricamente.

## 3 Aplicaciones a teoría de portafolios

### 3.1 El Sr. Merton conoce al Sr. Feynman

Un inversionista puede invertir su riqueza  $W$  en tres activos: un bono sin riesgo, con precio  $B$ ; y dos activos riesgosos, con precio  $P_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . La dinámica de los precios es descrita por las siguiente difusiones:

$$\frac{dB}{B} = r dt$$

$$\frac{dP_i}{P_i} = \alpha_i dt + \sigma_i dz_i + J dQ$$

donde la correlación entre  $dz_1$  y  $dz_2$  es  $\rho$ ; y el brinco común  $dQ$  (con magnitud  $J$ ) permite cambios discontinuos sistémicos en los rendimientos de los activos riesgosos. La ocurrencia de  $dQ$  es un proceso de Poisson con tasa  $\lambda$  que lleva a los precios de  $P_i$  a  $P_i(1 + J)$ .

Antes de continuar con la descripción del modelo, hagamos una breve digresión sobre cambios discontinuos sistémicos en los mercados de capitales. Por un lado, Barro (2006) es sólo una de las últimas de varias propuestas de considerar la posibilidad de desastres raros, que podríamos modelar con nuestro  $dQ$ , para explicar la “Anomalía de la Prima Accionaria” (esta idea se remonta al menos al trabajo del “problema del peso” de Rietz de 1988). Por otro lado, y como ya mencionamos en la introducción, los orígenes de este trabajo se encuentran en el capítulo “Exchange Rate and Systemic Risks” de Torres (2007), en donde

se estudia el problema de un inversionista interesado en un portafolio global diversificado. En ese trabajo se consideraba el siguiente hecho empírico de los mercados internacionales de capitales: los eventos de alta volatilidad existen, y éstos tienden a ocurrir al mismo tiempo entre países (riesgo sistémico). La evidencia empírica de la presencia de brincos en la mayoría de los rendimientos de las acciones está bien documentada. Para tipos de cambio, no es tan amplia: ver, por ejemplo, Bates (1996), Jorion (1989), y Torres (2007).

Retomemos la descripción de nuestro modelo: sean  $d$  y  $e_i$  las fracciones de la riqueza invertidas en el bono y los activos riesgosos, respectivamente. Entonces, podemos escribir la ecuación de acumulación como

$$\begin{aligned} \frac{dW}{W} &= \frac{dB}{B} + e_1 \left( \frac{dP_1}{P_1} - \frac{dB}{B} \right) + e_2 \left( \frac{dP_2}{P_2} - \frac{dB}{B} \right) \\ &= (r + e'\alpha) dt + e' \text{diag}(\sigma) dz + (e_1 + e_2) JdQ \end{aligned}$$

donde  $e \equiv \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 - r \\ \alpha_2 - r \end{bmatrix}$ ,  $\sigma \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}$  ( $\text{diag}(\sigma)$  es una matriz con los elementos de  $\sigma$  en su diagonal y ceros en el resto de las posiciones), y  $dz \equiv \begin{bmatrix} dz_1 \\ dz_2 \end{bmatrix}$ .

El inversionista busca maximizar el valor esperado del beneficio  $\frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  en una fecha terminal  $T > t$ , donde  $\gamma$  es su aversión al riesgo.

Si  $u(W, t) = E \left[ \frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma} | W_t = W \right]$ , entonces, por la fórmula de Feynman-Kac, el portafolio óptimo debe resolver

$$0 = \max_e u_t + \mathcal{L}u \text{ si } t < T$$

$$u(W, T) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

Recordemos que

$$\mathcal{L}u \equiv \left( \alpha W \frac{\partial}{\partial W} + \frac{1}{2} \sigma^2 W^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 W} \right) u + \lambda E [u(W(1+J), t) - u(W, t)]$$

donde la esperanza del segundo término es sobre la distribución de probabilidad de  $J$ .<sup>5</sup>

Adivinemos que una solución de  $u(W, t)$  es de la forma  $A(t) \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ :

$$0 = \max_e \frac{A_t}{A} + (1-\gamma)(r + e'\alpha) - \frac{1}{2} \gamma (1-\gamma) e' \Sigma e + \lambda E \left[ (1 + (e_1 + e_2) J)^{1-\gamma} - 1 \right] \quad (10)$$

<sup>5</sup>Observemos que el término  $\lambda E [u(W(1+J), t) - u(W, t)]$  no aparecía en el operador 3, donde no considerábamos objetos como  $dQ$ .

donde  $\Sigma \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$ .

La ecuación 10 arroja las siguientes condiciones de primer orden:

$$0 = \alpha - \gamma\Sigma e + \lambda E \left[ (1 + (e_1 + e_2)J)^{-\gamma} J \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \quad (11)$$

Desafortunadamente, la ecuación 11 no es un sistema de ecuaciones particularmente informativo.

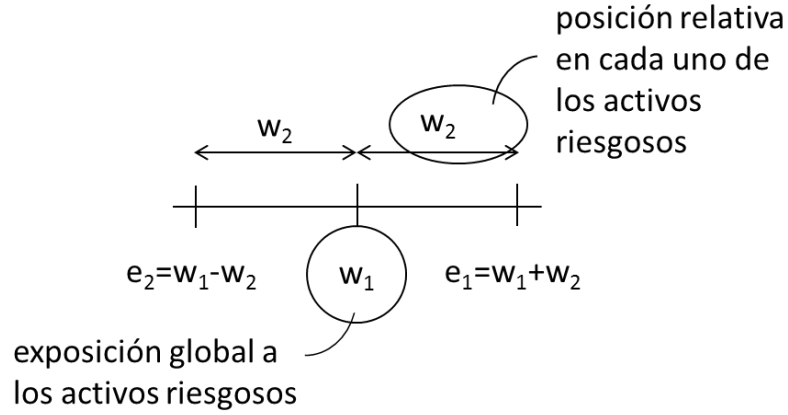
Para desarrollar intuición económica sobre la importancia de los brinco, ahora nos vamos a mover a un marco más especializado: como en Torres (2007), vamos a considerar  $\gamma = 2$  y vamos a suponer  $\sigma_1 = \sigma_2 = \tau$ . Además, vamos a suponer que  $J$ , la amplitud del brinco, sólo puede tomar dos valores: 0 con probabilidad  $(1 - p)$ , y  $\frac{k}{2}$  con probabilidad  $p$ .

Hagamos una breve pausa para divagar sobre la magnitud del coeficiente de aversión al riesgo  $\gamma$ . Una calibración muy cruda del modelo de valuación-de-activos basada-en-consumo de Lucas (1978) y Breeden (1979) llevó a Mehra y Prescott (1985) a una estimación de 38, un número calificado por Ross (2005) como “ridículamente alto” y que es conocido en la literatura como la “Anomalía de la Prima Accionaria” (Campbell y Cochrane (2000) y Lettau y Ludvigson (2001) contienen una revisión completa de la literatura empírica). Nuestra elección de  $\gamma = 2$ , debida principalmente a su conveniencia analítica, es consistente con los argumentos de (i) Ross (2005) de que una cota superior razonable para  $\gamma$  es 5; y de (ii) Barro y Sala-i-Martin (2003) de que un rango de 2–5 es necesario para explicar la evidencia empírica sobre las tasas de ahorro.

Ait-Sahalia, Cacho, y Hurd (2009) notan que los eigenvalores y eigenvectores de  $\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$  son  $(1 + \rho)$  y  $\psi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ; y  $(1 - \rho)$  y  $\psi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Dado que  $\psi_1$  y  $\psi_2$  constituyen una base para  $\mathbb{R}^2$ , entonces debemos poder expresar el vector  $e$  como  $w_1\psi_1 + w_2\psi_2$  para algún par de escalares  $w_1$  y  $w_2$ . Notemos que  $\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 + w_2 \\ w_1 - w_2 \end{bmatrix}$  y  $(e_1 + e_2) = 2w_1$ , por lo que la ecuación 10 se transforma en

$$0 = \max_{w_1, w_2} \frac{A_t}{A} - r - 2 \left\{ w_1 \left( \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - r \right) - \tau^2 (1 + \rho) w_1^2 + \lambda \frac{pk}{2} \left[ \frac{1}{\frac{1}{w_1} + k} \right] \right\} \\ - \left\{ w_2 (\alpha_1 - \alpha_2) - 2\tau^2 (1 - \rho) w_2^2 \right\}$$

Además de que podemos calcular  $w_1$  y  $w_2$  por separado, la solución en términos de estas variables es muy intuitiva:



Esta ecuación nos lleva a las siguientes condiciones de primer orden:

$$2 \left( \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - r \right) = 4\tau^2 (1 + \rho) w_1 - \frac{\lambda p k}{(1 + w_1 k)^2} \quad (12)$$

y

$$(\alpha_1 - \alpha_2) = 4\tau^2 (1 - \rho) w_2 \quad (13)$$

La ecuación 12 nos dice que la demanda global por activos riesgosos tiene una parte miope que es creciente en su sobre-rendimiento promedio  $(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - r)$ , y un componente de cobertura que cae con la correlación entre sus rendimientos  $\rho$ .

No hay ninguna sorpresa en el efecto de  $\tau^2$  sobre la exposición global a los activos riesgosos: a medida que aumenta su riesgo, se vuelven menos atractivos para nuestro inversionista averso-al-riesgo.  $w_1$  cambia monótonicamente con  $\lambda$  y  $p$ , y la dirección del cambio es determinada por el signo de  $k$ . La intuición es simple: cambios discontinuos positivos/negativos más frecuentes, aumentan/disminuyen el atractivo de los activos riesgosos. Por cierto, nuestra especificación hace observacionalmente equivalentes a  $\lambda$  y  $p$ .

Dos fuerzas en posible competencia pueden volver ambiguos los efectos de  $k$  sobre la elección óptima de  $w_1$ . Por un lado, saltos (positivos) más grandes implican mayores ganancias, aumentando así la demanda por activos riesgosos. Por otro lado, la varianza de la amplitud del brinco aumenta con el valor absoluto de  $k$ , desalentando así la demanda por estos activos. Por supuesto, en presencia de caídas, ambas fuerzas apuntan en la misma dirección: saltos más grandes no sólo implican mayores riesgos, sino también pérdidas mayores.

A partir de la ecuación 13 podemos ver que la demanda relativa de los activos riesgosos es creciente en sus rendimientos esperados (demanda miope).

Respecto al componente de cobertura de la demanda relativa, la relación entre  $w_2$  y  $\rho$  es muy sutil: intuitivamente, a medida que  $\rho$  crece, debería volverse

cada vez más difícil poder diferenciar el riesgo de los activos riesgosos. Por tanto, esperaríamos que  $w_2$  se volviera cero. Aunque este razonamiento no es inconsistente con la expresión  $w_2 \propto \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1 - \rho}$  (todo lo que necesitamos es que a medida que  $\rho$  se acerque a uno,  $(\alpha_1 - \alpha_2)$  tienda a cero con “suficiente” rapidez), formalizar esto va más allá de los propósitos de este trabajo.

Por último, por la naturaleza sistémica de los brincos, no debería constituir ninguna sorpresa su irrelevancia para la demanda relativa de los activos riesgosos.

¿Cuáles son los efectos empíricos de los riesgos sistémicos en la elección de portafolios? Todavía más importante, ¿Cuál es su significancia económica? En la siguiente sección vamos a mostrar como podemos usar la adjunta de la fórmula de Feynman-Kac para esbozar una metodología para estimar los parámetros de los procesos de difusión de nuestro modelo (el lector interesado puede consultar Torres (2007) para una implementación del método con datos reales).

### 3.2 El Sr. Merton conoce al Sr. Hilbert<sup>6</sup>

Ya antes hemos mostrado que podemos usar la adjunta de la fórmula de Feynman-Kac para identificar la distribución de probabilidad de un modelo de difusión, que denominamos  $f$ . Ahora vamos a hacer operativo este resultado.<sup>7</sup>

Empecemos recordando que la dinámica de los precios de los activos riesgosos es descrita por  $\frac{dP}{P} = \alpha dt + \sigma dz + JdQ$ . Si  $x \equiv \log P$ , entonces, por el lema de Ito, su proceso estocástico es  $dx = a dt + \sigma dz + j dQ$ , donde  $a \equiv (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)$  y  $j \equiv \log(1 + J)$ .

En nuestra exposición del formalismo canónico demostramos que  $f$  resuelve la ecuación  $0 = f_t - \mathcal{L}^* f$ , donde  $\mathcal{L}^*$  es la adjunta del generador infinitesimal del proceso de difusión:

$$\mathcal{L}^* f \equiv \left( -a \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f + \lambda E [f(x - j, t) - f(x, t)] \quad (14)$$

donde la esperanza  $E [f(x - j, t) - f(x, t)]$  es sobre la distribución de probabilidad de  $j$ ,  $\omega(j)$ :  $E [f(x - j, t)] = \int d\omega(j) f(x - j)$ .

En general, ecuaciones como  $0 = f_t - \mathcal{L}^* f$ , también conocidas como “adelantadas de Kolmogorov,” deben ser resueltas numéricamente. Pero en el caso de coeficientes constantes podemos hacer algo mucho mejor.

Usando el hecho de que la transformada de Fourier convierte en multiplicación la diferenciación (ver apéndice), podemos trasladar nuestra ecuación de Kolmogorov al dominio de Fourier como sigue:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \hat{f} - \left( +iak \hat{f} - \frac{1}{2} \sigma^2 k^2 \hat{f} + \lambda (\hat{\omega} - 1) \hat{f} \right)$$

<sup>6</sup>El estudio de las transformaciones lineales, incluyendo sus adjuntas, ocupa un lugar central en el análisis de los espacios de Hilbert (ver, por ejemplo, Shakarchi y Stein (2005)).

<sup>7</sup>Aunque en esta sección sólo vamos a considerar el caso univariado, excepto por la mayor complejidad algebraica, la extensión al caso multivariado es directa (ver apéndice C de Torres (2007)).

$$= \frac{\partial}{\partial t} \hat{f} - \left( iak - \frac{1}{2} \sigma^2 k^2 + \lambda (\hat{\omega} - 1) \right) \hat{f} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \hat{f} - K \hat{f}$$

Hemos llegado a una ecuación diferencial ordinaria que no es difícil de resolver:  $\hat{f}_t = \hat{f}_0 e^{tK}$ .

Recordemos la definición de la transformada de Fourier: la transformada de Fourier de  $f(x)$ ,  $\hat{f}(k)$ , se define como  $\int df(x) e^{ikx}$ . Porque  $f$  es una distribución de probabilidad, entonces podemos pensar en  $\hat{f}$  como  $E[e^{ikx}]$ , es decir como una función característica. Por tanto,  $\hat{f}_0 = E[e^{ikx_0}] = e^{ikx_0}$ , y esto convierte a  $e^{tK}$  en  $E[e^{ik(x-x_0)}]$ . Es decir,  $e^{tK}$  es una función característica para cambios en los logaritmos de los precios a lo largo del horizonte temporal  $t$  o, para intervalos de tiempo pequeños, para log-rendimientos (que vamos a denotar por  $r$ ).

Podemos usar  $\frac{\partial^s}{\partial^s k} e^{tK}$  (evaluada en  $k=0$ ) para obtener una fórmula para el momento no-central número  $s$  de  $r$ :

$s$	$\frac{\partial^s}{\partial^s k} E[e^{ikr}]$	$\frac{\partial^s}{\partial^s k} e^K$
1	$iE[r e^{ikr}]$	$K_k e^K$
2	$-E[r^2 e^{ikr}]$	$(K_k^2 + K_{kk}) e^K$
3	$-iE[r^3 e^{ikr}]$	$(K_k^3 + 3K_k K_{kk} + K_{kkk}) e^K$
4	$E[r^4 e^{ikr}]$	$(K_k^4 + 6K_k^2 K_{kk} + 4K_k K_{kkk} + 3K_{kk}^2 + K_{kkkk}) e^K$

donde, por conveniencia analítica, hemos considerado el caso  $t=1$ .

Supongamos que  $j \sim N(\mu, \Gamma)$ . En este caso, la magnitud de los brincos está acotada por debajo por  $-1$  y no tiene ningún límite superior;  $\hat{\omega} = e^{ik\mu - \frac{1}{2}k^2\Gamma}$ ; y

$s$	$\frac{\partial^s}{\partial^s k} K$	$\frac{\partial^s}{\partial^s k} K _{k=0}$
0	$iak - \frac{1}{2} \sigma^2 k^2 + \lambda \left( e^{ik\mu - \frac{1}{2}k^2\Gamma} - 1 \right)$	0
1	$ia - \sigma^2 k + \lambda (i\mu - k\Gamma) e^{ik\mu - \frac{1}{2}k^2\Gamma}$	$i(a + \lambda\mu)$
2	$-\sigma^2 + \lambda \left[ (i\mu - k\Gamma)^2 - \Gamma \right] e^{ik\mu - \frac{1}{2}k^2\Gamma}$	$-[\sigma^2 + \lambda(\mu^2 + \Gamma)]$
3	$\lambda \left[ (i\mu - k\Gamma)^3 - 3\Gamma(i\mu - k\Gamma) \right] e^{ik\mu - \frac{1}{2}k^2\Gamma}$	$-i\lambda(\mu^3 + 3\mu\Gamma)$
4	$\lambda \left[ (i\mu - k\Gamma)^4 - 6\Gamma(i\mu - k\Gamma)^2 + 3\Gamma^2 \right] e^{ik\mu - \frac{1}{2}k^2\Gamma}$	$\lambda(\mu^4 + 6\mu^2\Gamma + 3\Gamma^2)$

Podemos combinar los resultados de los dos cuadros anteriores para obtener (después de un número no despreciable de manipulaciones algebraicas) fórmulas analíticas para los primeros cuatro momentos centrales de  $r$ :

$E[r]$	$= -iK_k = a + \lambda\mu \equiv m$
$E[(r - m)^2]$	$= K_{kk} = \sigma^2 + \lambda(\mu^2 + \Gamma) \equiv s^2$
$E[(r - m)^3]$	$= iK_{kkk} = \lambda\mu(\mu^2 + 3\Gamma)$
$E[(r - m)^4]$	$= 3K_{kk}^2 + K_{kkkk} = 3(s^2)^2 + \lambda(\mu^4 + 6\mu^2\Gamma + 3\Gamma^2)$

Ya estamos listos para discutir la aplicación del GMM para estimar los parámetros de nuestro modelo, pero antes vamos a hacer un par de comentarios breves sobre los resultados del último cuadro.

Dado que  $\lambda$  es una probabilidad y  $\Gamma$  una varianza, la fórmula para el tercer momento muestra que los rendimientos están sesgados, en donde  $\mu$ , la media de la magnitud del salto, define el signo del sesgo.

Segundo, y más interesante, claramente el exceso de kurtosis ( $E[(r - m)^4] - 3(s^2)^2$ ) es positivo. Justamente esto fue lo que llevó a Press (1967) a introducir brincos discontinuos como una posible explicación de la alta kurtosis observada en los rendimientos de las acciones.

Por último, es importante mencionar que aunque desde un punto de vista teórico no hay ninguna razón para no considerar momentos de orden cinco o superiores, los problemas prácticos que plantean son serios (a propósito, aunque no se ocupa de la estimación de procesos de difusión, Martin ha estudiado los efectos de incluir *cumulants*<sup>8</sup> de orden superior en el modelo clásico del CCAPM).

### 3.3 Dificultades prácticas para hacer trabajo empírico

En 1994 Melino observó que a pesar de la cotidianidad del uso de modelos de tiempo continuo en valuación de activos, la cantidad y sofisticación del trabajo teórico no habían sido igualadas por la investigación empírica. Veinte años más tarde el panorama no ha cambiado mucho, y una razón importante es que la estimación no es fácil. En nuestra opinión, son tres las dificultades más importantes: nuestro limitado conocimiento sobre las propiedades de GMM aplicado al cálculo de Ito, la naturaleza de los datos disponibles, y problemas numéricos.

Aunque para la mayoría de los procesos brownianos de relevancia práctica GMM sigue siendo el único estimador consistente y viable desde un punto de vista computacional, todavía es muy poco lo que sabemos sobre sus propiedades. De hecho, podríamos calificar mucho de nuestro conocimiento como “negativo,” en el sentido de que sus limitaciones ocupan un lugar prominente entre las cosas que mejor conocemos. Por ejemplo, Campbell, Lo, y MacKinlay (1997) destacan que las propiedades de un estimador de GMM son muy sensibles a las condiciones de momentos y la métrica de la distancia usadas. También, Ball y Torous (1985) han advertido que un comportamiento errático de los momentos

<sup>8</sup>Hasta donde sabemos, no tenemos una palabra en español para este término en inglés.

muestrales de orden “superior” inducen una incertidumbre significativa sobre el desempeño de GMM.

Por otro lado, si bien es cierto que dinámicas de precios más complejas aumentan las combinaciones de parámetros que resultan en los mismas cantidades observables, más serios son los problemas de medición. En particular, bajo muestreo discreto, todos los cambios son discretos por naturaleza. Al respecto, Ait-Sahalia (2004) menciona que nuestras habilidades para inferir el origen de cambios “grandes” se deterioran rápidamente cuando pasamos de intervalos de minutos a horas y a días. Además, para periodos “largos,” los rendimientos tienden a suavizarse debido a que los saltos suelen cancelarse entre sí, desapareciendo así de las series de tiempo la evidencia visual de los brincos.

Por último, también tenemos las dificultades numéricas, sobre las cuales sólo vamos a mencionar que Beckers (1981), Ball y Torous (1983), Honore (1998), y Torres (2007) han documentado que un uso no-cuidadoso de las técnicas numéricas de optimización con frecuencia llevan a estimaciones inverosímiles (principalmente varianzas negativas e intensidades de los procesos de Poisson absurdamente grandes) y resultados estadísticos pobres (medidos por sus grandes errores estándar).

## 4 Consideraciones finales

Sin duda todavía queda mucho por hacer en el estudio de la elección óptima de portafolios para el largo plazo. Sólo por dar un par de ejemplos, en nuestro análisis dejamos fuera características muy importantes de los mercados de capitales como costos de transacción,<sup>9</sup> capital humano, y consideraciones de equilibrio en los precios. Además, y tal vez más importante, cerrar la enorme brecha que existe entre la cantidad y sofisticación de la teoría vs la práctica permanece como un gran reto. Sin embargo, tampoco quedan dudas de que hemos avanzado mucho desde aquellos días *circa* 1930 en que, como comentamos en la introducción, Fisher argumentaba que una teoría de elección bajo incertidumbre se antojaba imposible.

## Referencias

- Ait-Sahalia, Y. 2004. “Disentangling Diffusion from Jumps.” *Journal of Financial Economics*, 74: 487-528.
- Ait-Sahalia, Y., J. Cacho, y T. Hurd. 2009. “Portfolio Choice with Jumps: A Closed Form Solution.” *Annals of Applied Probability*, 19: 556-584.

---

<sup>9</sup>Weinberg (2013) menciona que en mecánica cuántica, el uso de cuadrículas (el término en inglés es *lattices*) para representar el espacio-tiempo y resolver numéricamente la integral de Feynman está revelando aspectos del problema original que no son accesibles vía teoría de perturbaciones. Investigadores del Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM me han sugerido que estos hallazgos podrían ser relevantes en finanzas, dada la imposibilidad de operar en tiempo continuo en los mercados reales.



- Arrow, K. 1951. "Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk-Taking Situations." *Econometrica*, 19: 404-437.
- Ball, C., y W. Torous. 1983. "A Simplified Jump Process for Common Stock Returns." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18: 53-65.
- Ball, C., y W. Torous. 1985. "On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Option Pricing." *Journal of Finance*, 40: 155-173.
- Barro, R. 2003. *Nothing is Sacred*. The MIT Press.
- Barro, R. 2006. "Rare Disasters and Asset Markets in the Twentieth Century." *Quarterly Journal of Economics*, 121: 823-866.
- Barro, R., y X. Sala-i-Martin. 2003. *Economic Growth*. The MIT Press.
- Bates, D. 1996. "Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options." *Review of Financial Studies*, 9: 69-107.
- Beckers, S. 1981. "A Note on Estimating the Parameters of the Diffusion-Jump Model of Stock Returns." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 16: 127-140.
- Bernstein, P. 2005. *Capital Ideas*. John Wiley & Sons.
- Black, F., y M. Scholes. 1973. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." *Journal of Political Economy*, 81: 637-654.
- Breeden, D. 1979. "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities." *Journal of Financial Economics*, 7: 265-296.
- Campbell, J. 2006. "Household Finance." *Journal of Finance*, 61: 1553-1604.
- Campbell, J., y J. Cochrane. 2000. "Explaining the Poor Performance of Consumption Based Asset Pricing Models." *Journal of Finance*, 55: 2863-2878.
- Campbell, J., y L. Viceira. 2002. *Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors*. Oxford: Oxford University Press.
- Campbell, J., A. Lo, y A. MacKinlay. 1997. *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.
- Duffie, D. 2001. *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press.
- Fama, E. 1970. "Multiperiod Consumption-Investment Decisions." *American Economic Review*, 60: 163-174.

- Fama, E., y W. Schwert. 1977. "Asset Returns and Inflation." *Journal of Financial Economics*, 5: 115-146.
- Feynman, R. 1942. *Feynman's Thesis*. World Scientific.
- Feynman, R. 1963. "The Principle of Least Action." En *The Feynman Lectures on Physics, Vol. 2* Addison Wesley Publishing.
- Feynman, R., A. Hibbs, y D. Styer. 2010. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Dover Publications.
- Fisher, I. 1930. *The Theory of Interest*. Macmillan.
- Georgi, H. 1999. *Lie Algebras in Particle Physics*. Westview Press.
- Gradshteyn, I., y I. Ryzhik. 1980. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press.
- Grosche, C. 1996. *Path Integrals, Hyperbolic Spaces, and Selberg Trace Formulae*. World Scientific.
- Grossman, S., y R. Shiller. 1981. "The Determinants of the Variability of Stock Market Prices." *American Economic Review*, 71: 222-227.
- Hansen, L., y K. Singleton. 1983. "Stochastic Consumption, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Asset Returns." *Journal of Political Economy*, 91: 249-268.
- Honore, P. 1998. "Pitfalls in Estimating Jump-Diffusion Models." Working Paper Series 18, Aarhus School of Business.
- Jorion, P. 1989. "On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets." *Review of Financial Studies*, 1: 427-445.
- Lettau, M., y S. Ludvigson. 2001. "Resurrecting the (C) CAPM: A Cross-sectional Test When Risk Premia Are Time Varying." *Journal of Political Economy*, 109: 1238-1287.
- Lucas, R. 1978. "Asset Prices in an Exchange Economy." *Econometrica*, 46: 1429-1446.
- Markowitz, H. 1952. "Portfolio Selection." *Journal of Finance*, 7: 77-91.
- Martin, I. "Consumption-Based Asset Pricing with Higher Cumulants." *Review of Economic Studies*, por publicarse.
- Mayers, D. 1972. "Nonmarketable Assets and Capital Equilibrium Under Uncertainty." En M. Jensen (editor), *Studies in the Theory of Capital Markets*, Praeger.
- Mehra, J., y E. Prescott. 1985. "The Equity Premium: A Puzzle." *Journal of Monetary Economics*, 15: 145-161.

- Melino, A. 1994. “Estimation of Continuous-Time Stochastic Processes in Finance.” En C. Sims (editor), *Advances in Econometrics, Sixth World Congress, Vol. II*, Cambridge University Press.
- Merton, R. 1969. “Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous Time Case.” *Review of Economic and Statistics*, 51: 247-257.
- Merton, R. 1971. “Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model.” *Journal of Economic Theory*, 3: 373-413.
- Merton, R. 1973. “An Intertemporal Capital Asset Pricing Model.” *Econometrica*, 41: 867-887.
- Modigliani, F., y R. Sutch. 1966. “Innovations in Interest Rate Policy.” *American Economic Review*, 56: 178-197.
- Mossin, J. 1968. “Optimal Multiperiod Portfolio Policies.” *Journal of Business*, 41: 205-225.
- Press, S. 1967. “A Compound Events Model of Security Prices.” *Journal of Business*, 40: 317-335.
- Ramsey, F. 1928. “A Mathematical Theory of Saving.” *Economic Journal*, 38: 543-559.
- Rietz, T. 1988. “The Equity Risk Premium: A Solution.” *Journal of Monetary Economics*, 22: 117-131.
- Ross, S. 2005. *Neoclassical Finance*. Princeton University Press.
- Roy, A. 1952. “Safety First and the Holding of Assets.” *Econometrica*, 20: 431-449.
- Rubinstein, M. 1976a. “The Strong Case for the Generalized Logarithmic Utility Model as the Premier Model of Financial Markets.” *Journal of Finance*, 31: 551-571.
- Rubinstein, M. 1976b. “The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options.” *Bell Journal of Economics*, 7: 407-425.
- Samuelson, P. 1963. “Risk and Uncertainty: A Fallacy of Large Numbers.” *Scientia*, 98: 108-113.
- Samuelson, P. 1969. “Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming.” *Review of Economics and Statistics*, 51: 239-246.
- Sharpe, W. 1963. “A Simplified Model for Portfolio Analysis.” *Management Science*, 9: 277-293.
- Shiller, R. 1982. “Consumption, Asset Markets, and Macroeconomic Fluctuations.” *Carnegie Mellon Conference Series on Public Policy*, 17: 203-238.

- Shakarchi, R., y E. Stein. 2003. *Fourier Analysis*. Princeton University Press.
- Shakarchi, R., y E. Stein. 2005. *Real Analysis*. Princeton University Press.
- Shakarchi, R., y E. Stein. 2011. *Functional Analysis*. Princeton University Press.
- Stiglitz, J. 1970. “A Consumption-Oriented Theory of Demand for Financial Assets and the Term Structure of Interest Rates.” *Review of Economic Studies*, 37: 321-351.
- Tobin, J. 1958. “Liquidity Preferences as Behavior Towards Risk.” *Review of Economic Studies*, 25: 68-85.
- Torres, M. 2007. “Essays on International Capital Markets.” Tesis doctoral, Harvard University.
- Weinberg, S. 2013. *Lectures on Quantum Mechanics*. Cambridge University Press.

## Apéndice: transformadas de Fourier

La conexión del análisis de Fourier con nuestro trabajo viene de que esta rama del análisis empezó con dos ecuaciones diferenciales parciales, la de la onda y la del calor, que fueron resueltas usando series de Fourier. En este apéndice, basado en Shakarchi y Stein (2003), vamos a presentar las propiedades de las transformadas de Fourier que usamos en el cuerpo principal de este trabajo.

**Definición.** Dadas dos funciones  $f$  y  $g$  en  $\mathbb{R}$ , definimos su convolución  $(f * g)(x)$  como  $\int dy f(y) g(x - y)$ .

**Definición.** El espacio de Schwartz (en  $\mathbb{R}$ ) es el conjunto de todas las funciones indefinidamente diferenciables  $f$  tales que  $f$  y todas sus derivadas son rápidamente decrecientes. Denotamos a este espacio por  $S(\mathbb{R})$ .

**Definición.** Si  $f \in S(\mathbb{R})$ , definimos su transformada de Fourier para  $k \in \mathbb{R}$  como  $\hat{f}(k) \equiv \int df(x) e^{ikx}$  (este “paso” lo representamos como  $f \rightarrow \hat{f}$ ).

**Proposición.** La transformada de Fourier intercambia diferenciación por multiplicación: si  $f \in S(\mathbb{R})$ , entonces  $f_x \rightarrow -ik\hat{f}$ .

**Prueba.** (Ver, por ejemplo, proposición 1.2 en el capítulo 5 de Shakarchi y Stein (2003)).

**Teorema (de inversión de Fourier).** La transformada de Fourier es invertible: si  $f \in S(\mathbb{R})$ , entonces  $f(x) = (2\pi)^{-1} \int d\hat{f}(k) e^{-ikx}$ .

**Prueba.** (Ver, por ejemplo, teorema 1.9 en el capítulo 5 de Shakarchi y Stein (2003)).

**Proposición.** La transformada de Fourier intercambia convolución por multiplicación: si  $f, g \in S(\mathbb{R})$ , entonces  $f * g \rightarrow \hat{f}\hat{g}$ .

**Prueba.** (Ver, por ejemplo, proposición 1.11 en el capítulo 5 de Shakarchi y Stein (2003)).