



Centro de Estudios Económicos

[www.colmex.mx](http://www.colmex.mx)

El Colegio de México, A.C.

***Serie documentos de trabajo***

**CRECIMIENTO, COMERCIO Y MOVIMIENTOS DE CAPITAL  
EN ECONOMÍAS CON OFERTA ILIMITADA DE TRABAJO**

José Romero y Oscar Fernández

DOCUMENTO DE TRABAJO

Núm. VII – 2001

# **CRECIMIENTO, COMERCIO Y MOVIMIENTOS DE CAPITAL EN ECONOMÍAS CON OFERTA ILIMITADA DE TRABAJO**

**José Romero y Oscar Fernández**

*El Colegio de México  
Camino al Ajusco 20  
Pedregal de Santa Teresa  
10740, Tlalpan  
México, D.F.  
Tel: 54-49-30-51  
Fax: 56-45-04-64*

*email:*

*[jromero@colmex.mx](mailto:jromero@colmex.mx)*  
*[ofernan@colmex.mx](mailto:ofernan@colmex.mx)*

## **Resumen**

En este trabajo se construye un modelo de crecimiento para una economía atrasada. El modelo para esta economía se caracteriza por tener un sector moderno incapaz de absorber a toda la mano de obra existente, lo que obliga a los trabajadores que no logran emplearse en ese sector, a permanecer en actividades de subsistencia. Construido el modelo se analiza el efecto de un cambio tecnológico que mejore la productividad de las actividades de subsistencia y se demuestra que este cambio tecnológico aumenta el ingreso per capita y el salario real de esta economía; se sugiere que ésta puede ser una posible estrategia de crecimiento. También se considera la apertura de esta economía al comercio internacional y se determinan los patrones de especialización bajo el supuesto de una economía pequeña. Luego se abandona este supuesto y se consideran explícitamente los términos de intercambio, para tal efecto se suponen dos regiones que comercian, Norte y Sur, donde el Norte es una economía moderna y el Sur es una economía atrasada; se encuentra que la tasa de crecimiento del Sur es endógena y depende de la tasa de crecimiento del Norte, también se encuentra que el Sur no puede hacer mucho para aumentar la participación del sector moderno de su economía, ya que aumentos en la frugalidad o en la productividad deterioran los términos de intercambio neutralizando con ello la capacidad de acumulación de capital de la región. Por último se consideran los movimientos internacionales de capital y se encuentra que aumentos en la inversión extranjera provocan reducciones en la inversión interna y total en el Sur; esto es, los incrementos en la inversión extranjera no compensan la reducción en la inversión nacional, la inversión extranjera desplaza a la inversión nacional.

## I. INTRODUCCIÓN

El Tratado de Libre Comercio de América del Norte entre dos países desarrollados (Canadá y EUA) y uno subdesarrollado (México), revive el interés en la naturaleza de las relaciones económicas que se dan entre países con economías asimétricas. En la literatura sobre comercio y desarrollo se acostumbra llamar a este tipo de relaciones, relaciones económicas “Norte Sur”<sup>1</sup>.

La literatura económica tradicional no considera que exista alguna asimetría fundamental entre estas economías. Esta corriente utiliza una combinación del modelo estándar de la teoría del crecimiento económico y el modelo tradicional de la teoría del comercio internacional para analizar el fenómeno del crecimiento en una economía abierta. Esta combinación de modelos se utiliza por igual para analizar el fenómeno del crecimiento para una economía moderna que para una economía atrasada. Una característica distintiva de este enfoque es el suponer que existe una oferta limitada de trabajo y salarios endógenos. La aplicación mecánica de las conclusiones de política económica de estos modelos en economías atrasadas, ha llevado a verdaderos desastres sociales.

El modelo de crecimiento estándar es el modelo Solow-Swan<sup>2</sup>, este es un modelo de acumulación de capital para una economía madura en la que existe escasez de mano de obra. La oferta de trabajo es totalmente inelástica y crece a una tasa exógena determinada por el crecimiento de la población, por lo que los salarios se modifican al cambiar la relación capital trabajo. En su versión original este modelo predecía que una economía crecería a una tasa exógena, igual a la tasa de crecimiento de la población. Más adelante se observó que la mayor parte de las economías desarrolladas crecían a tasas mayores que esto, y se atribuyó esta diferencia a cambios tecnológicos exógenos. Versiones recientes de este modelo hacen endógeno el cambio tecnológico, y las más ambiciosas, tratan de hacer lo propio con el crecimiento de la población.<sup>3</sup> Una constante en todas las versiones de este modelo es que la oferta de trabajo es finita y el salario es endógeno.

Por otra parte el modelo tradicional para explicar el comercio internacional es el Heckscher Ohlin.<sup>4</sup> El propósito de este modelo es mostrar como ciertas cantidades fijas de factores se asignan entre diferentes industrias de acuerdo a los precios relativos de los bienes. Para cada vector de precios de los bienes corresponde una asignación de factores y un vector de precios de factores. El modelo predice que cada país exportará a través de bienes su factor relativamente abundante y que con el libre comercio se elevará la remuneración de ese factor (en el caso de México, el trabajo). Otros llevan las conclusiones de este modelo más adelante y señalan que “La reducción y eliminación de las barreras comerciales dan lugar a una asignación y utilización más eficiente de los recursos productivos. En este contexto,

---

<sup>1</sup> Véase por ejemplo Díaz-Alejandro (1975), Bacha, E. (1978), Findlay, R. (1980), Dixit, A.K. (1982), Krugman P. (1982), Findlay R. (1984), Burgstaller (1987), Findlay (1992), Krugman P. y A. Venables (1995), Helliwell J.F., y A.Chung (1995), Findlay (1996), Davis (1997) y Baldwin R. E., P. Martin, y G. Ottaviano, (1998).

<sup>2</sup> Este modelo fue desarrollado por R. Solow (Solow, 1956) y T.W. Swan (Swan 1956).

<sup>3</sup> Versiones recientes de este modelo y sus extensiones (crecimiento endógeno y modelos de tipo AK) aparecen en Barro Sala I Martin (1995), Romer (1996) y Aghion Philippe y Peter Howitt (1998).

<sup>4</sup> Una versión completa de este modelo aparece en Helpman y Krugman (1991).

los países pueden concentrar su esfuerzo productivo en generar aquellos bienes para los cuales cuentan con ventajas comparativas, y al hacerlo se tendrán efectos favorables sobre el empleo y los salarios, y, por lo tanto, sobre la reducción de las disparidades económicas entre los países, lo que podrá transformar las condiciones que determinan los movimientos migratorios internacionales”<sup>5</sup>

Estos modelos han servido de base para el diseño de la política económica en muchos países subdesarrollados, incluido México, con resultados contradictorios a lo predicho por la teoría. Por ejemplo, el auge de las exportaciones de 1990 a 2000 en México no se ha traducido en crecimiento del ingreso per capita o de los salarios, y el auge en la inversión durante esos años tampoco ha servido para frenar el deterioro de los salarios. En México durante ese período la población creció a una tasa de 2.26% promedio anual, en tanto que la inversión total lo hizo al 4.3% y la privada al 5.1%.<sup>6</sup>

Estas consideraciones nos llevan a pensar en formas alternativas de analizar el crecimiento de economías como la mexicana y su interacción con economías desarrolladas.

En la sección II se presenta un modelo de crecimiento para una economía atrasada, cerrada y sin gobierno, esta economía atrasada se caracteriza por tener un sector moderno que es incapaz de absorber a toda la mano de obra que existe en la economía, por lo que los trabajadores que no logran emplearse en el sector moderno sobreviven en actividades de subsistencia. En la sección III se analiza el efecto de un cambio tecnológico que mejore la productividad del sector de subsistencia, se demuestra que este cambio tecnológico aumenta el salario real y el ingreso per capita del país y se sugiere que ésta puede ser una posible estrategia de crecimiento. En la sección IV se considera la apertura de esta economía al comercio internacional y se determinan los patrones de especialización bajo el supuesto de una economía pequeña. En la sección V se abandona el supuesto de economía pequeña y se consideran explícitamente los términos de intercambio; para tal efecto se suponen dos regiones que comercian, Norte y Sur; el Norte es una economía moderna y la del Sur es atrasada, se encuentra que la tasa de crecimiento del Sur es endógena y depende la tasa de crecimiento del Norte; también se encuentra que el Sur no puede hacer mucho para aumentar la participación del sector moderno de su economía ya que los aumentos en la frugalidad o en la productividad son neutralizados por un deterioro de los términos de intercambio. En la sección VI se consideran los movimientos de capitales entre el Norte y el Sur; se encuentra que aumentos en la inversión extranjera provocan reducciones en la inversión interna del Sur y reducciones en la inversión total (la suma de la inversión extranjera y nacional); la inversión extranjera desplaza a la nacional y el aumento de la primera no logra compensar la caída de la segunda. En la Sección VII se comentan las principales conclusiones del trabajo.

---

<sup>5</sup> Tuirán (2000).

<sup>6</sup> Véase Romero (2001) para un análisis comparativo de los resultados obtenidos con la apertura comercial, y con los que se obtuvieron durante la etapa de sustitución de importaciones.

## II. CRECIMIENTO EN UNA ECONOMÍA ATRASADA SIN COMERCIO<sup>7</sup>

Las economías atrasadas son aquellas en las que coexiste un sector atrasado junto con un sector moderno y surgen como resultado de un exceso de oferta de trabajo con relación al stock de capital. En estas economías es posible contratar cantidades ilimitadas de trabajo a un mismo salario real. En esta sección se presenta un modelo especialmente diseñado para estudiar la acumulación de capital en economías con estas características. La diferencia básica de éste modelo con el modelo tradicional, es que junto al sector moderno coexiste un sector atrasado que absorbe la mano de obra que no puede ser empleada en el sector moderno.

En la construcción de este modelo supondremos una economía cerrada y sin gobierno, por lo que el ingreso nacional se divide entre consumo y ahorro.<sup>8</sup> Los mercados son perfectamente competitivos y se vacían en forma instantánea, de manera que siempre existe pleno empleo del trabajo y plena utilización de la capacidad.

El trabajo en ésta economía es contratado hasta que su productividad marginal es igual a un cierto salario real dado. El empleo en el sector moderno dependerá de la cantidad de capital disponible. La relación capital-trabajo está determinada por la tasa de salario, que a su vez determina el producto marginal del capital y por lo tanto la tasa de ganancias.

Se supone que una fracción constante de las ganancias son ahorradas y todos los salarios son consumidos. La fracción de las ganancias que son ahorradas determina el incremento del acervo de capital, y éste es el motor que impulsa al sistema económico. Supondremos que la fracción del ingreso de los capitalistas dedicada al ahorro es  $s$ , la cual es constante y exógena; por lo tanto, la acumulación de capital depende únicamente del ahorro de los capitalistas.

Al sector atrasado lo denominamos  $A$  y al sector moderno  $M$ . El sector  $A$  es un sector precapitalista de economía de subsistencia. En este sector la producción se lleva a cabo solamente con trabajo, sin auxilio de capital, y la tecnología presenta rendimientos constantes. El producto total en este sector se divide entre sus trabajadores por lo que el producto medio es constante. Llamaremos  $\bar{w}$  a este producto medio y viene dado por:

$$\bar{w} = Y_A / L_A \quad (1)$$

Donde  $Y_A$  es el producto total de este sector y  $L_A$  es la cantidad de trabajo empleada en esta actividad.

La tecnología en el sector moderno está representada por una función de producción con rendimientos constantes a escala que utiliza capital y trabajo como insumos. Expresada en términos per capita esta función viene dada por:

<sup>7</sup> Las ideas que se presentan en esta sección recogen elementos contenidos en Lewis (1954), Lewis (1958a), Lewis (1958b) y Ros (1997).

<sup>8</sup> En la sección III supondremos una economía pequeña y abierta y en la IV consideraremos los efectos de los términos de intercambio sobre el crecimiento.

$$y_M = f(k_M) \quad (2)$$

Donde  $y_M \equiv Y_M/L_M$  es el producto por trabajador en el sector moderno,  $Y_M$  y  $L_M$  son el producto total y empleo en el sector moderno respectivamente, y  $k_M \equiv K/L_M$ , es la relación capital por trabajador en ese sector.  $K$  es el stock de capital. La producción por hombre ocupado  $y_M = f(k_M)$  es una función creciente de  $k_M$  y presenta las siguientes características:  $f(0)=0$ ;  $f'(k_M)>0$ ;  $f''(k_M)<0$ .<sup>9</sup> Adicionalmente se supone que  $f(k_M)$  satisface las condiciones de Inada<sup>10</sup>:  $\lim_{k \rightarrow 0} f(k_M) = 0$ ;  $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k_M) = 0$ . Estas condiciones establecen que el producto marginal es muy grande cuando la relación  $k_M$  es muy pequeña y es muy pequeño cuando esta relación es muy grande. Esto quiere decir que al incrementarse  $k_M$ , aumenta el producto por hombre ocupado, aunque en forma decreciente.

Se supone que los mercados de trabajo son competitivos en el sentido de que lo que los capitalistas tienen que pagar está determinado por lo que la gente puede ganar fuera de ese sector. En forma más específica, el salario en el sector capitalista,  $w_M$ , está determinado por el producto medio que se obtiene en el sector atrasado<sup>11</sup>:

$$w_M = \bar{w}, \text{ siempre y cuando } L_A > 0. \quad (3)$$

Los productores en el sector moderno de esta economía maximizan beneficios sujetos a ese salario, por lo que tenemos:<sup>12</sup>

$$f(k_M) - f'(k_M)k_M = \bar{w}. \quad (4)$$

Bajo los supuestos de  $f'(k_M) > 0$  y  $f''(k_M) < 0$ ; existe un único  $k_M^*$  que satisface (4) para un valor dado de  $\bar{w}$ . Por lo tanto, dada una productividad en el sector atrasado,  $\bar{w}$ , la tasa de ganancia en esta economía viene dada por<sup>13</sup>:

$$r = f''(k_M^*) \quad (5)$$

En esta economía no existe desempleo abierto por lo que los trabajadores que no están empleados en el sector moderno trabajan en el sector de subsistencia.

$$L = L_M + L_A, \text{ donde } L \text{ es la cantidad total de trabajo.} \quad (6)$$

<sup>9</sup>  $f'(k_M)$  y  $f''(k_M)$  son respectivamente, la primera y segunda derivadas de  $f(k_M)$ .

<sup>10</sup> Inada, (1964).

<sup>11</sup> Lewis considera que el sector moderno paga un salario igual al producto medio del sector atrasado más un "premio". Este premio es un sobreprecio que los capitalistas tienen que pagar para poder atraer trabajadores del sector de subsistencia. Este premio puede interpretarse como una compensación por el mayor costo de la vida en zonas urbanas, o por los costos psicológicos asociados a cambiar de ciudad y/o actividad, etc "Los ingresos en el sector de subsistencia establecen un piso para los salarios pagados en el sector moderno, pero en la práctica los salarios en el sector moderno tienen que ser más altos que esto. Usualmente existe una diferencia de 30% o más entre los salarios pagados en el sector moderno y los ingresos en el sector atrasado." Lewis (1954), p. 221. En este trabajo omitimos este aspecto.

<sup>12</sup> Véase la sección A del Apéndice.

<sup>13</sup> Véase la sección B del Apéndice.

Una condición necesaria para que coexistan los dos sectores es que el producto medio del trabajo en el sector atrasado sea menor que el producto medio en el sector moderno:  $\bar{w} < y_M$ . Si esto no fuera así no existiría excedente<sup>14</sup> y tampoco un sector moderno; nadie usaría capital y toda la mano de obra estaría empleada en el sector atrasado.

El considerar excedente de mano de obra introduce varias diferencias con la dinámica de la economía con respecto al modelo tradicional.

Primera, mientras exista un sector atrasado, el sector moderno no opera con rendimientos decrecientes. Mientras existe excedente de mano de obra, el producto crece al ritmo en que lo hace la acumulación de capital. A partir de que se agota el exceso de mano de obra, la economía madura y el crecimiento se comporta en la forma descrita por el modelo estándar.

Segunda, en los dos modelos el producto por hombre ocupado crece cuando aumenta la intensidad de capital en la economía. Sin embargo el origen de este incremento es diferente en cada modelo. En el modelo Solow-Swan esto sucede porque en la transición entre un equilibrio y otro, la relación capital trabajo se incrementa haciendo a cada trabajador más productivo. En el modelo dual, en los dos sectores el producto por hombre ocupado permanece constante. El incremento en el producto por hombre ocupado en la economía se debe a una reasignación de trabajo desde el sector atrasado hacia el sector moderno; el trabajo abandona las actividades de subsistencia y se desplaza hacia el sector moderno donde es más productivo.

Para examinar estos puntos podemos expresar el producto por hombre ocupado en toda la economía,  $y \equiv Y/L$ , como un promedio ponderado de los productos medios por trabajador en los dos sectores,  $\bar{w}$  (atrasado) y  $y_M$  (moderno) respectivamente, y donde los pesos sean las participaciones de cada sector en el empleo total.

$$y \equiv Y/L = Y/(L_A + L_M) = \bar{w}(L_A/L) + y_M(L_M/L) = \bar{w} + (y_M - \bar{w})(L_M/L) \quad (7)$$

Dado que  $y_M = f(k_M^*)$ , la ecuación (7) se convierte en:

$$y = \bar{w} + (f(k_M^*) - \bar{w})(L_M/L) \quad (8)$$

A partir de la ecuación (4) sabemos que durante la etapa de exceso de mano de obra  $k_M$  permanece constante, por lo que el producto medio por trabajador en el sector moderno,  $f(k_M^*)$ , también lo hace, también sabemos que este producto medio se mantiene por encima del producto medio en el sector atrasado, es decir,  $f(k_M^*) > \bar{w}$ . Por lo tanto, la ecuación 8 nos dice que el producto medio por trabajador en toda la economía es una función lineal creciente de la participación del sector moderno en el empleo total.

<sup>14</sup> De la ecuación (4) se desprende que  $f(k_M) = \bar{w} + f'(k_M)k_M > \bar{w}$ , esto sólo es cierto si  $f'(k_M) > 0$ . Utilizando (4) y (5) se desprende que:  $y_M = f(k_M) > \bar{w}$  implica  $r = f'(k_M) > 0$ .

Dado que durante la fase de excedente de mano de obra la relación capital trabajo en el sector moderno,  $k_M$ , no cambia, el empleo en el sector moderno viene determinado por  $L_M = K/k_M^*$ , donde  $K$  es el stock de capital. Sustituyendo este resultado en la ecuación (8) tenemos:

$$y = \bar{w} + (f(k_M^*) - \bar{w})(1/k_M^*)k \quad (9)$$

Donde  $k=K/L$  es la relación capital trabajo de la economía ( $k \neq k_M$ ). Dado que:  $(f(k_M^*) - \bar{w})(1/k_M^*) = (f(k_M^*) - \bar{w})(L_M/K_M) = (Y_M - \bar{w}L_M)/K_M$ , y que la economía opera con rendimientos constantes a escala, por el Teorema de Euler tenemos que  $r = (Y_M - \bar{w}L_M)/K_M$ , por lo que la ecuación (9) se convierte en:

$$y = \bar{w} + rk. \quad (9a)$$

Mientras dure la etapa de exceso de mano de obra,  $\bar{w}$  y  $r$  permanecen fijos, por lo que el ingreso por hombre ocupado aumenta a medida que aumenta  $k$  ( $k_M$  permanece fija). Como los salarios están dados, los aumentos en el ingreso per capita van a parar a los capitalistas en forma de ganancias. Parte de esas ganancias crecientes se ahorran, por lo que el capital crece y el producto por trabajador lo hace aún más. Esta participación creciente de las ganancias es lo que explica el gran incremento en los ahorros con respecto al ingreso durante la fase de exceso de mano de obra.

A medida que el sector moderno se expande con relación al sector atrasado, la participación de las ganancias en el valor de la producción del sector moderno permanece constante pero aumenta con respecto al ingreso total<sup>15</sup>. Esto hace que la proporción de ahorro a ingreso nacional aumente a medida que crece el sector moderno en términos relativos<sup>16</sup>.

Dicho esto, analicemos el fenómeno del crecimiento en esta economía. De la ecuación (9a) se desprende que el ingreso nacional viene dado por:

$$Y = \bar{w}L + rK \quad (10)$$

Suponemos que el tamaño de la fuerza de trabajo en esta economía está dado en cada instante y que ésta crece en el tiempo a una tasa constante. Específicamente supondremos que la cantidad inicial de la fuerza de trabajo es  $L(0)$ , y que ésta crece a partir de ese momento a una tasa dada,  $g$ , por lo que, la fuerza de trabajo en el tiempo  $t$ , se determina por:

$$L(t) = L(0)e^{gt} \quad (11)$$

<sup>15</sup> Esto se demuestra formalmente en la sección C del Apéndice.

<sup>16</sup> Si la participación de las ganancias en el ingreso nacional crece, la proporción del ahorro con respecto al producto aumenta. Esto se debe a que suponemos que los capitalistas son los únicos que ahorran y que estos siempre ahorran una fracción constante de sus ganancias.

Supondremos que cada unidad de producto destinada a la inversión produce una unidad de nuevo capital y que la tasa de depreciación es cero. Como los capitalistas son los únicos que ahorran, el incremento del capital equivale a las ganancias ahorradas. Considerando que el salario no cambia, la tasa de crecimiento del capital viene dado por:

$$g_K \equiv \dot{K}(t)/K(t) = s r K(t) / K(t) = s r \quad (12)$$

El punto arriba de una variable indica derivada con respecto al tiempo. Donde  $0 < s < 1$  es la fracción de las ganancias que se ahorran.  $K(t)$  es el stock de capital en el tiempo  $t$ , y  $r$  es la tasa de ganancia.

Mientras exista exceso de mano de obra, el salario permanece fijo en  $\bar{w}$ , y la relación capital trabajo  $k_M^*$  no cambia, por lo tanto, la tasa de crecimiento del empleo en el sector moderno debe de ser igual a la tasa de crecimiento del capital, esto es  $g_{LM} = g_K$ . También, dado que la función producción en el sector moderno presenta rendimientos constantes a escala, el producto en el sector moderno,  $g_{yM}$  crece a la tasa de crecimiento del capital; por lo tanto, tenemos que  $g_{yM} = g_{LM} = g_K = s r$ . Esto es, el ingreso y el empleo en el sector moderno crecen a la tasa del crecimiento del capital.

La ecuación (10) nos dice que el ingreso nacional está compuesto de la masa salarial (tanto del sector moderno como atrasado) más la masa de ganancias. De la ecuación 10 y considerando que el salario no cambia, se desprende que:

$$\dot{Y}(t) = \bar{w} \dot{L} + r \dot{K}(t) \text{ o bien:}$$

$$g_Y = a_L g + a_K g_K = (1 - a_K)g + a_K s r; \quad (13)$$

donde  $g_Y \equiv \frac{\dot{Y}(t)}{Y}$  es la tasa de crecimiento del producto total en la economía;  $a_L \equiv \frac{\bar{w}L}{Y} \geq 0$  es la participación del trabajo en el producto;  $a_K \equiv \frac{rK}{Y} \geq 0$  es la participación del capital en el producto; y  $a_L + a_K = 1$ .

La ecuación (13) nos dice que la tasa de crecimiento del producto es un promedio ponderado del crecimiento de la fuerza de trabajo y del capital, y en el que las ponderaciones de ese promedio son las participaciones de cada factor en el producto.

De acuerdo con (13), para que la economía crezca más rápido que lo que lo hace la fuerza de trabajo, se requiere que el capital lo haga más rápido que la fuerza de trabajo, esto es, se requiere que  $s r > g$ . Por otra parte, la tasa de crecimiento de la economía sería igual a la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo si el capital creciera a la misma tasa que la mano de obra, esto es sí:  $g = s r$ . Esta misma tasa de crecimiento se obtendría sí el producto medio

del sector moderno fuera igual al del sector atrasado, esto es si la tasa de ganancias fuera cero, en ese caso no existiría sector moderno, tendríamos  $a_K = 0$  y  $a_L = 1$  y de acuerdo con (13),  $g_Y = g$ .

Un resultado adicional es que si durante la etapa de exceso de mano de obra, el capital crece al ritmo en que lo hace el trabajo, las participaciones de los dos sectores en el empleo ( $L_M / L$  y  $L_A / L$ ) no cambian. Para que desaparezca el sector atrasado y los salarios se eleven, la tasa de acumulación debe de ser mayor a la tasa de crecimiento de la población por muchos períodos.

### III. CRECIMIENTO Y PROGRESO TÉCNICO EN UNA ECONOMÍA ATRASADA

Algunos autores sostienen que los bajos salarios tienen un efecto adverso sobre el desarrollo tecnológico de los países atrasados ya que hacen menos urgente realizar cambios tecnológicos para ahorrar costos, y la ausencia de estos cambios tecnológicos contribuyen a mantener los salarios bajos.<sup>17</sup> Esta hipótesis la deducen de la observación de que en los países con salarios e ingresos per capita altos es donde se realiza la mayor cantidad de innovaciones. En esos países los altos salarios crean un fuerte incentivo para invertir en tecnología de producción, ahorradora de trabajo, dado que si logran desarrollarla obtienen como recompensa una cantidad equivalente al número de trabajadores que ahorran multiplicado por la tasa de salario. Pero la nueva tecnología mejora la productividad, e irónicamente incrementa aún más los salarios, lo que estimula una nueva ola de innovaciones. Este ciclo se repite continuamente resultando muy difícil saber si el desarrollo de nueva tecnología estimula el incremento de los salarios o viceversa. Lo más probable es que en esos países la causalidad opere en ambos sentidos. En contraste, en las economías atrasadas no existe este círculo virtuoso, los bajos salarios hacen menos apremiante realizar innovaciones.

A pesar de la conclusión anterior, vamos a introducir cambios tecnológicos en nuestro modelo. Veremos que el progreso técnico afecta al crecimiento y al proceso de acumulación de capital de manera diferente, dependiendo de en que sector ocurra. Sí el progreso técnico ocurre en el sector moderno, aumenta el producto medio en ese sector, así como la tasa de ganancias, la acumulación de capital y el ingreso per capita de la economía. Si ocurre en el sector atrasado aumenta el salario y el ingreso per capita de la economía pero disminuye la tasa de ganancias, la acumulación de capital y el crecimiento del sector moderno.

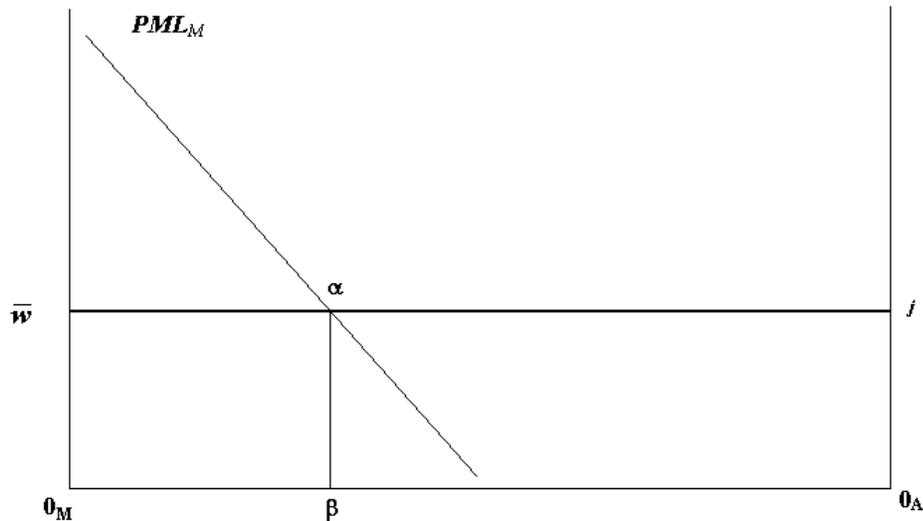
El progreso técnico en el sector moderno puede tomar la forma de un desplazamiento Hicks-neutro de la función de producción  $f(k_M)$ , de manera que  $f(k_M)$  aumente para cada nivel de  $k_M$ . Este cambio técnico trae como consecuencia de acuerdo con (4) y (5) un aumento en la tasa de ganancias [ $r = [f(k_M) - \bar{w}] / k_M$ ] y al aumentar  $r$ , aumenta la tasa de acumulación:  $s$ . El bienestar potencial de la sociedad como un todo se incrementa ya que de acuerdo con (9a) el ingreso per capita aumenta; los trabajadores quedan igual pero los capitalistas mejoran.

<sup>17</sup> Véase Habakkuk (1962) y Uselding (1972).

Existe también un tipo de progreso técnico más modesto, pero más fácil de promover por parte de las economías atrasadas y que trae también beneficios para el país que los consigue. Este progreso técnico está orientado a incrementar la productividad del sector atrasado y con ello elevar el salario. Este efecto benéfico del progreso técnico tiene también sus costos ya que afecta la acumulación de capital de esa economía. La tasa de ganancias baja como consecuencia de la elevación del salario y con ello disminuye el ritmo de expansión del sector moderno. Sin embargo, el efecto neto del progreso técnico sobre el bienestar potencial de la sociedad es positivo. Para demostrar este punto construimos el siguiente argumento gráfico.

En la gráfica 1 se muestra como se alcanza el equilibrio en el mercado de trabajo.  $O_M O_A$  mide la cantidad total de trabajo:  $L$ . El empleo en el sector moderno se mide hacia la derecha de  $O_M$  y el empleo en el sector atrasado a la izquierda de  $O_A$ . La línea  $PML_M$  mide el producto marginal del trabajo, para un nivel de capital  $K$ . La línea horizontal, con altura  $\bar{w}$  mide el valor alternativo del trabajo en el sector atrasado. La asignación óptima de trabajo ocurre cuando los productos marginales del trabajo en las dos alternativas se igualan, *i.e.* en la coordenada horizontal de la intersección de  $PML_M$  y  $\bar{w}j$ . En la Gráfica 1 el empleo en el sector moderno es:  $L_M = O_M \mathbf{b}$ ; y el resto en el sector atrasado,  $L_A = O_A \mathbf{b}$ . El salario está fijo a la altura,  $\mathbf{ba} = O_M \bar{w}$ .

Gráfica 1

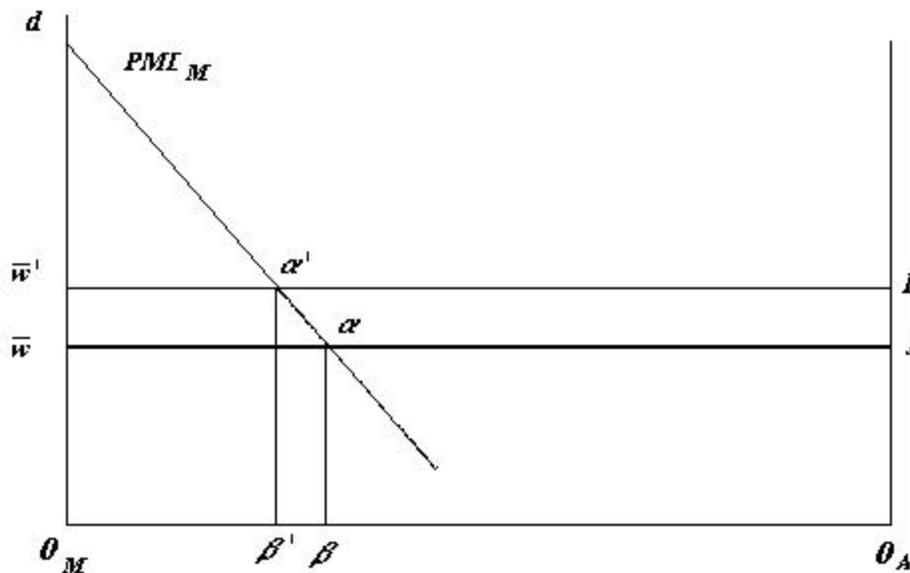


Las ganancias de los capitalistas están formadas por la diferencia entre producto marginal y el producto medio del trabajo. El área formada por debajo de la curva del producto marginal, a partir del origen y hasta el punto  $\mathbf{b}$  representa el producto total en el sector moderno. El rectángulo formado por los punto  $O_M \mathbf{ba} \bar{w}$  representa la parte del producto que se les paga a los trabajadores en ese sector. La diferencia entre estas dos áreas es lo que reciben los capitalistas. El producto total en el sector atrasado es  $\mathbf{baj} O_A$ .

Ahora supongamos, se da un aumento en la productividad del sector atrasado, por lo que los salarios suben en toda la economía; en términos de la gráfica 2, digamos que suben de  $\bar{w}$  a  $\bar{w}'$ . Como consecuencia el empleo en el sector atrasado aumenta de  $0_A b$  a  $0_A b'$  y en el sector el moderno se reduce de  $0_M b$  a  $0_M b'$ . El producto en el sector atrasado aumenta de  $0_A b a j$  a  $0_A b' a' h$  y el producto en el sector moderno se reduce de  $0_M d a b$  a  $0_M d a' b'$ . Finalmente el valor de la producción de toda la economía se incrementa de  $0_M d a j 0_A$  a  $0_M d a' h 0_A$ .

Por lo tanto, el producto medio de toda la economía crece al aumentar el producto medio en el sector de subsistencia, y con ello se da una mejora potencial del país<sup>18</sup>. Sin embargo, no todos los beneficios se distribuyen uniformemente, los salarios aumentan pero los beneficios disminuyen. Las ganancias de los capitalistas se reducen de  $\bar{w} d a$  a  $\bar{w}' d a'$ . Con todo el aumento de los salarios mas que compensa la caída de las ganancias. En términos de la Gráfica 6 el área  $\bar{w} \bar{w}' h j$  que es mayor que  $\bar{w} \bar{w}' a' a$ , que representa la disminución de las ganancias.

Gráfica 2



Este punto es importante ya que recientemente algunos países en desarrollo, en lugar de concentrarse exclusivamente en la expansión del sector moderno para lograr el crecimiento, han comenzado a considerar el fomento de la productividad del sector atrasado como forma complementaria de lograr este objetivo, y como una forma efectiva de combatir la pobreza.<sup>19</sup>

<sup>18</sup> En el sentido de la prueba de compensación, en que los ganadores pueden compensar a los perdedores y quedarse con un excedente.

<sup>19</sup> Véase Romero (2001a).

#### IV. CRECIMIENTO Y COMERCIO EN UNA ECONOMÍA ATRASADA QUE TOMA LOS PRECIOS INTERNACIONALES COMO UN DATO

En el modelo anterior, supusimos que sólo se producía un solo bien, y que podía considerarse como un bien agregado que podemos llamar *PIB* (producto interno bruto). Para analizar la relación entre crecimiento y comercio internacional debemos desagregar ese bien compuesto. Vamos a suponer que existe un gran número de bienes y que cada uno de ellos se produce mediante capital y trabajo usando funciones de producción que presentan rendimientos constantes a escala, y demás supuestos usuales. Supondremos que no existe producción conjunta por lo que definimos la función de producción de cada bien como:

$$Y_i = F_i(K_i, L_i) \quad (14)$$

La función de producción  $F_i$  relaciona la producción  $Y_i$  del bien  $i$ , con la cantidad de insumos:  $K_i$  y  $L_i$ .

Para dar el paso desde un bien agregado hasta la mezcla de bienes que lo componen haremos uso de la función de producto interno bruto máximo:  $PIB$ ,<sup>20</sup> la cual resulta de calcular el ingreso nacional máximo que se puede obtener dada la dotación de factores, tecnología y precios de los bienes. Esta función se define como:

$$PIB(p, K, L) = \max_{K_i, L_i} [\sum_{i=1}^I p_i F_i(K_i, L_i) \mid K_i \geq 0, L_i \geq 0; \sum_{i=1}^I K_i \leq K, \sum_{i=1}^I L_i \leq L] \quad (15)$$

Donde  $p$  es el vector de precios,  $p_i$  es el precio del bien  $i$ , e  $I$  es el número de bienes. La función  $PIB(\bullet)$ , construida a partir de las funciones de producción de los bienes individuales, presenta las mismas características que las funciones de que está hecha: es cóncava y linealmente homogénea en  $K$  y  $L$ . Las remuneraciones al trabajo y al capital están dadas respectivamente por:

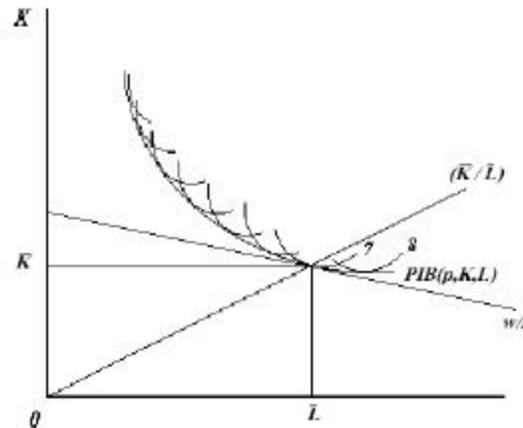
$$w = \partial PIB(\bullet) / \partial L \quad (16)$$

$$r = \partial PIB(\bullet) / \partial K. \quad (17)$$

La función  $PIB(\bullet)$  tiene la forma que se muestra en la Gráfica 3, y la pendiente de esta curva es igual a la relación  $w/r$ . Quitando los posibles segmentos lineales, la relación  $w/r$  aumenta con la relación  $K/L$ . Dado que la función  $PIB(\bullet)$  es homogénea de grado uno, una expansión proporcional en la dotación de factores produce una expansión radial de la curva, pero no altera su pendiente. En la gráfica aparece el nivel de  $PIB$  máximo que se puede lograr con cierta una dotación de factores,  $\bar{K}$  y  $\bar{L}$ . Con esa dotación de factores esta economía sólo se producirá el bien 7.

<sup>20</sup> Dixit y Norman 1980, capítulo 2.

Gráfica 3



De la misma manera, como esta función es homogénea de grado uno puede contraerse hasta lograr el valor de  $PIB=1\$$ . Este valor de  $PIB$  puede producirse mediante una infinita combinación de los dos factores. Esto es:

$$(K, L)^{1\$} = \{K \geq \sum_{i=1}^I K_i, L \geq \sum_{i=1}^I L_i \mid \sum_{i=1}^I p_i F_i(K_i, L_i) = 1\$ \} \quad (18)$$

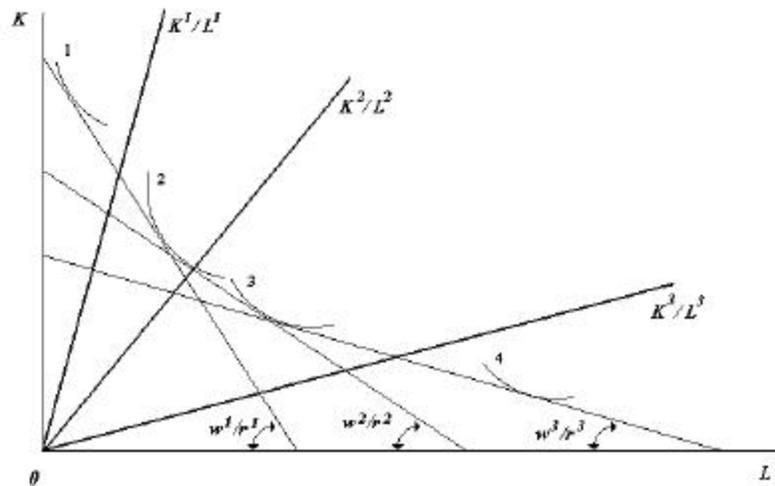
donde  $(K, L)^{1\$}$  es el conjunto de todas las dotaciones de factores con las que se puede producir un valor 1\$ de producto; por lo tanto, cada valor de  $PIB$  define una isocuanta convexa al origen.

El siguiente paso es establecer los patrones de comercio entre países y el contenido factorial de los flujos de comercio. En este punto de la discusión abandonamos el supuesto de economía cerrada y suponemos una economía pequeña y abierta, la cuál toma los precios internacionales como un dato. Supondremos además que los precios de los factores no se igualan entre países, esto último puede atribuirse a que las dotaciones de factores de los diferentes países son tan diferentes que caen fuera del “cono” de igualación de precios de los factores.

En la Gráfica 4 se representan tres países, cuatro bienes y dos factores productivos.<sup>21</sup> Los bienes se representan con isocuantas que tienen el valor de 1\$. La envolvente de esas cuatro isocuantas sería la función  $PIB(\bullet)=1\$$ , común para los tres países. Para cada país  $j$ , el rayo  $K^j/L^j$  representa la relación capital trabajo de sus dotaciones, y la línea con pendiente negativa  $w^j/r^j$ , representa el precio relativo de los factores en ese país.

<sup>21</sup> Véase Helpman y Krugman (1991), Capítulo I.

Gráfica 4



En esta gráfica el país que tiene mayor el capital por hombre ocupado produce los bienes 1 y 2; el segundo país, con la relación capital trabajo intermedia, produce los bienes 2 y 3 (este país puede que comparta la producción del bien 2 con el país uno y el bien 3 con el tercer país); el país tres, que tiene la menor cantidad capital por trabajador produce los bienes 3 y 4. A partir de esta gráfica se puede observar que entre más alta sea la relación capital trabajo de un país, éste utilizará más capital y menos trabajo por unidad de producto en todas las líneas de producción que las que utiliza el otro país. De esto se deduce que, independientemente de qué bienes comercia cada país con el otro, el país más rico en capital exportará productos que incorporan una mayor cantidad de capital por trabajador que el que tienen sus importaciones.<sup>22</sup>

La función  $PIB(\bullet)$ , puede usarse para extender nuestro modelo para una economía abierta que toma los precios internacionales como un dato. Durante la etapa de exceso de mano de obra el sector moderno produce utilizando la misma relación  $k_M^*$ . Si la relación  $k_M$  no cambia la economía sigue produciendo la misma mezcla de bienes. Si los salarios son bajos la relación capital trabajo será también baja y los productos producidos serán relativamente rudimentarios. Esta situación puede mantenerse durante muchos años a pesar de que el proceso de acumulación esté teniendo lugar a un ritmo acelerado, esto es, aunque por muchos años la tasa de inversión sea superior a la tasa de crecimiento de la población ( $sr > g$ ). El país seguirá produciendo los mismos bienes en la medida en que existan excedentes de mano de obra.<sup>23</sup>

<sup>22</sup> Para una generalización del Teorema Hecksher Ohlin para el caso en que el comercio de bienes no logra igualar los precios de los factores entre países, véanse Helpman y Krugman (1991), p. 26-27, y Helpman (1984).

<sup>23</sup> Si llega el momento en que los excedentes de mano de obra se agoten, entonces el país entrará a la fase descrita por el modelo Solow-Swan. Cuando eso sucede la economía inicia su camino hasta el "estado estable". En su camino ira incrementando su relación capital trabajo y consecuentemente producirá bienes más intensivos en capital, eventualmente la economía alcanza la relación capital trabajo del estado estable y el patrón de comercio se estabiliza nuevamente.

## V. CRECIMIENTO, COMERCIO Y TÉRMINOS DE INTERCAMBIO ENTRE UNA ECONOMÍA MODERNA Y UNA ECONOMÍA ATRASADA.<sup>24</sup>

En esta sección vamos a suponer que la economía mundial está compuesta de dos regiones, el Norte y el Sur. Cada una de estas regiones está especializada en la producción de un único bien compuesto<sup>25</sup>, el cual puede pensarse que está formado de manufacturas sofisticadas y bienes de capital en el Norte, y productos primarios y manufacturas simples en el Sur. Llamemos al bien del Norte “manufacturas” y al del Sur “productos primarios”.

En el Norte la tecnología utilizada para producir manufacturas está representada por una función de producción que presenta rendimientos constantes a escala, y que utiliza capital y trabajo como insumos. En cada momento el tamaño de la fuerza de trabajo está dado, y crece a una tasa exógena constante. En esta economía el capital consiste de un stock de manufacturas. También existe progreso tecnológico aumentador de trabajo, mismo que evoluciona a una tasa constante. Bajo estos supuestos la función producción puede ser expresada en función de capital y trabajo “efectivo”. El trabajo efectivo crece a través del tiempo a una tasa fija, igual a la suma de la tasa natural del crecimiento de la fuerza de trabajo y de la tasa de progreso técnico.

En el Norte se ahorra y se invierte una fracción constante del ingreso. Los mercados son perfectamente competitivos y se vacían en forma instantánea por lo que siempre existe pleno empleo del trabajo y plena utilización de la capacidad.

Todos estos supuestos corresponden al modelo neoclásico de Solow-Swan. La única diferencia es que la proporción del producto en el Norte que no es ahorrada se gasta en manufacturas o en productos primarios importados. La proporción en las que se consumen uno y otro dependerá de sus precios relativos. Las elasticidades ingreso de la demanda para los dos bienes son unitarias.

El Sur no produce bienes de capital por lo que tiene que importarlos todos del Norte. El Sur únicamente produce bienes primarios. En esta región este producto se produce de dos maneras, una moderna que utiliza capital y trabajo como insumos y otra atrasada que utiliza sólo trabajo.

El empleo en el sector moderno del Sur depende de la cantidad de capital disponible. La relación capital-trabajo en esa región está determinada por la tasa de salario, y esta relación a su vez determina el producto marginal del capital. La tasa de ganancias, sin embargo, ya no es igual al producto marginal físico del capital. Dado que el capital consiste de un stock de manufacturas y las ganancias son un flujo de productos primarios, la tasa de ganancias depende del precio relativo entre las manufacturas y bienes primarios.

---

<sup>24</sup> Esta sección está inspirada en Findlay (1980) y (1984), p. 221-229.

<sup>25</sup> De acuerdo con el Teorema del Bien Compuesto de Hicks (1946), un bien compuesto es un conjunto de bienes cuyos precios relativos no cambian.

En el Sur el incremento en el stock de capital está determinado por la fracción de las ganancias que se ahorran. La economía del Sur se comporta de acuerdo al modelo descrito en la sección II en todos los sentidos excepto que la demanda de inversión es sólo para manufacturas, en tanto que la demanda de consumo es para los dos tipos de bienes. Los gastos de consumo, ya sean de los salarios o de las ganancias, se realizan en bienes manufacturados o en bienes primarios, las proporciones dependen de los precios relativos. La elasticidad ingreso de la demanda de ambos bienes es unitaria.

Las economías del Norte y del Sur interactúan entre sí únicamente a través del comercio. En esta sección consideramos que no existen movimientos internacionales de capital ni de trabajo. Tampoco consideramos que existen préstamos internacionales por lo que el comercio se encuentra siempre equilibrado. La demanda de importaciones en cada región depende del precio relativo de los dos bienes y del ingreso real de cada región.

En el Norte el bien compuesto  $Y_N$ , se produce con tecnología estándar de acuerdo con:

$$Y_N = q(k_N)L_N \quad (19)$$

donde  $q(k_N)$  es la función de producción por unidad de trabajo efectiva, la cual presenta rendimientos constantes a escala y demás propiedades usuales;  $k_N \equiv K_N / L_N$  es el stock de capital por unidad de trabajo efectiva,  $K_N$  es el stock de capital y  $L_N$  es la fuerza de trabajo efectiva, la cual crece a una tasa exógena  $n$ . En cada momento del tiempo la fuerza de trabajo viene determinada por:

$$L_N(t) = L_N(0) e^{nt} \quad (20)$$

Por su parte,  $k_N = K_N / L_N$ , está determinada por su historia pasada y cambia en el tiempo de acuerdo con:<sup>26</sup>

$$\dot{k}_N = sq(k_N) - nk_N \quad (21)$$

donde  $s$  es la proporción constante del ingreso que se ahorra en el Norte. La tasa de cambio de  $k_N$  es igual a la diferencia entre la inversión per capita y la cantidad de nuevo capital que se requiere para mantener la relación  $k_N$  constante.

El equilibrio de largo plazo requiere que  $\dot{k}_N = 0$ , esto es que:

$$k_N^* = \frac{sq(k_N^*)}{n} \quad (22)$$

Donde  $k_N^*$  es la relación capital trabajo en el estado estable para el Norte.

La demanda de importaciones del Norte,  $I_N$ , puede escribirse en la forma:

---

<sup>26</sup> Véase Romer (1996), p. 13.

$$I_N = mL_N \quad (23)$$

en donde  $m$ , la demanda de importaciones por trabajador, es una función de los términos de intercambio del Sur,  $\mathbf{p}$ , y del consumo por trabajador en el Norte,  $(1-s)q(k_N)$ :

$$m = m[\pi, (1-s)q(k_N)L_N] = m(\pi, k_N) \quad (24)$$

con las siguientes propiedades:  $\frac{\partial m}{\partial \pi} < 0$ ; y  $\frac{\partial m}{\partial k_N} > 0$ .

La producción del Norte se divide entre inversión, exportaciones  $\mathbf{p}I_N$ , y el residuo, que es el consumo doméstico.

En el Sur, los bienes primarios constituyen el único bien producido. Al igual que en el Norte el tamaño de la fuerza de trabajo está determinado exógenamente. El capital también consiste de un stock de manufacturas. Dado que el capital consiste de un stock de manufacturas y el producto es un flujo de bienes primarios, la tasa de ganancias se define como:

$$r = \mathbf{p}f'(k_M^*) \quad (25)$$

Donde de acuerdo con (4)  $k_M^*$  es fija. Como ya hemos visto,  $r$  y  $s$  determinan en el Sur, la tasa de crecimiento del capital, producción y empleo del sector moderno. La tasa de crecimiento del producto para toda la economía del Sur, viene dada de acuerdo con (13) y (25), por:  $g_Y = (1-\mathbf{a}_K)g + \mathbf{a}_K s \mathbf{p}f'(k_M^*)$ .

La demanda de importaciones del Sur,  $I_S$ , puede expresarse como la suma de las importaciones de bienes de consumo, tanto para los trabajadores como para los capitalistas mas las importaciones de bienes de capital.

La demanda de importaciones de bienes de consumo para los trabajadores puede ser escrita en la forma  $\mathbf{m}L$  ( $L$  es la fuerza de trabajo total en el Sur), en donde la demanda por trabajador  $\mathbf{m}$  es una función de los términos de intercambio  $\mathbf{p}$  y del salario de los trabajadores  $\bar{w}$ :  $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\pi, \bar{w})$ , con  $\frac{d\mathbf{m}}{d\mathbf{p}} > 0$ .

En forma similar la demanda de importaciones de bienes de consumo para los capitalistas puede escribirse como  $\mathbf{m}_k L_M$  ( $L_M$  es el empleo en el sector moderno), en donde la demanda de importaciones por trabajador del sector en moderno  $\mathbf{m}_k$  es una función de los términos de intercambio  $\mathbf{p}$  y del consumo capitalista por trabajador en ese sector,  $(1-s)r k_M^* = (1-s)\mathbf{p}f'(k_M^*)k_M^*$ , en donde  $s$  es la propensión al ahorro del Sur (sólo los capitalistas ahorran).

Esto es  $\mathbf{m}_k = \mathbf{m}_k(\pi, (1-s)\mathbf{p}f'(k_M^*)k_M^*)$ , con  $\frac{d\mathbf{m}_k}{d\mathbf{p}} > 0$ .

La demanda de importaciones de bienes de capital se corresponde con la demanda de inversión del Sur, dado que se supone que el Sur no produce bienes de capital. Como la inversión del Sur iguala al ahorro de los capitalistas, la demanda de importaciones de bienes de capital del Sur puede ser escrita en la forma  $\mathbf{s}rK = \mathbf{s}r k_M^* L_M = \mathbf{s}f'(k_M^*) k_M^* L_M$ .

La demanda total de importaciones del Sur puede ser expresada entonces como:

$$I_S = \mathbf{m}_L(\pi, \bar{w})L + \mathbf{m}_K(\pi, (1-\mathbf{s})f'(k_M^*)k_M^*)L_M + \mathbf{s}f'(k_M^*)k_M^* L_M \quad (26)$$

En ausencia de movimientos internacionales de capital la balanza comercial debe de ser cero, esto es:

$$\mathbf{p}(t)I_N(t) = I_S(t) \quad (27)$$

es decir:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}m(\mathbf{p}k_N)L_N &= \mathbf{m}_L(\pi, \bar{w})L + \mathbf{m}_K(\pi, (1-\mathbf{s})f'(k_M^*)k_M^*)L_M + \mathbf{s}f'(k_M^*)k_M^* L_M = \\ & \mathbf{m}_L(\pi, \bar{w})L + [\mathbf{m}_K(\pi, (1-\mathbf{s})f'(k_M^*)k_M^*) + \mathbf{s}f'(k_M^*)k_M^*]L_M \end{aligned}$$

Dividiendo entre  $L$  ambos miembros se obtiene entonces:

$$\mathbf{p}m(\mathbf{p}k_N) \mathbf{f} = \mathbf{m}_L(\pi, \bar{w}) + [\mathbf{m}_K(\pi, (1-\mathbf{s})f'(k_M^*)k_M^*) + \mathbf{s}f'(k_M^*)k_M^*] \mathbf{I} \quad (28)$$

en donde  $\mathbf{f} = L_N/L$  y  $\mathbf{I} = L_M/L$ . Por simplicidad se supondrá que  $\mathbf{f}$  es constante, lo que equivale a hacer que  $L_N$  y  $L$  crezcan a la misma tasa. Como la tasa de crecimiento de  $L_N$  es  $n$ , entonces si la tasa de crecimiento de  $L$  es  $g$  el supuesto es que:  $g = n$ .

Una condición necesaria para que exista el equilibrio del estado estable en la economía mundial, es que las tasas de crecimiento del Norte y Sur sean iguales. El equilibrio estable de largo plazo ocurre cuando las tasas de crecimiento de las dos regiones son iguales, esto es, de acuerdo con (13) y el supuesto de  $g=n$ , cuando:

$$\mathbf{s}f'(k_M^*) = n \quad (29)$$

Dado que la tasa de crecimiento natural del Norte,  $n$ , es una constante, se desprende que existe sólo un valor de los términos de intercambio  $\mathbf{p}$  consistente con un crecimiento balanceado de la economía mundial. Esta condición se satisface únicamente cuando:

$$\mathbf{p}^* = \frac{n}{\mathbf{s}f'(k_M^*)} \quad (30)$$

Los términos de intercambio en el estado estable  $\mathbf{p}^*$ , dependen de  $n$ ,  $\mathbf{s}$ , y  $\bar{w}$ , así como de la función de producción del Sur, pero son independientes de la función de producción y de la propensión a ahorrar en el Norte, y de las demandas de importaciones en las dos regiones.

De la ecuación (28) puede despejarse  $\mathbf{p}$  para llegar a:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{m}_K(\mathbf{p}, (1-\mathbf{s})f'(k_M^*)k_M^*)\mathbf{I} + \mathbf{m}_L(\mathbf{p}, \bar{w})}{m(\mathbf{p}, k_N)\mathbf{f} - \mathbf{I}\mathbf{s}f'(k_M^*)k_M^*} \quad (31)$$

En el corto plazo  $\mathbf{I}$  y  $k_N$  están dadas por la historia previa, de manera que (31) determina el valor de  $\mathbf{p}$  que equilibra la balanza comercial. Por otro lado, si  $\mathbf{p}$  está en su valor de largo plazo, en  $\mathbf{p}^*$ , de acuerdo con (30), entonces para cada valor de  $k_N$  existe un valor  $\mathbf{I}$  que hace que (31) se satisfaga. En particular, si  $k_N$  está en su valor de estado estable de acuerdo con (22),  $k_N^*$ , entonces a partir de la ecuación (31) y utilizando (30) podemos despejar  $\mathbf{I}$  y obtener el valor de esta variable para el estado estable:

$$\mathbf{I}^* = \frac{\mathbf{p}^* m(\mathbf{p}^*, k_N^*)\mathbf{f} - \mathbf{m}_L(\mathbf{p}^*, \bar{w})}{nk_M^* + \mathbf{m}_K(\mathbf{p}^*, (1-\mathbf{s})f'(k_M^*)k_M^*)} \quad (32)$$

De (10), (19) y (25) se puede establecer la relación entre los ingresos totales de las dos regiones:

$$\frac{Y}{Y_N} = \frac{\mathbf{p}^* f'(k_M^*)k_M^* L_M + \bar{w}L}{q(k_N^*)L_N} = \frac{\mathbf{p}^* f'(k_M^*)k_M^* \mathbf{I}^* + \bar{w}}{q(k_N^*)\mathbf{f}} \quad (33a)$$

O bien la relación entre los ingresos per capita de las dos regiones:

$$\frac{y}{y_N} = \frac{\mathbf{p}^* f'(k_M^*)k_M^* \mathbf{I}^* + \bar{w}}{q(k_N^*)} \quad (33b)$$

Al interpretar (33a) y (33b) debe recordarse que  $q(k_N^*)$  es el producto por unidad de trabajo “efectivo”. Sí  $n$  incluye cambio tecnológico aumentador de trabajo, la tasa de trabajo efectivo a número de trabajadores crece continuamente en el Norte, y por lo tanto el ingreso per cápita.

Una vez obtenida la solución para el estado estable, pasamos la dinámica del sistema y la convergencia hacia al equilibrio desde una condición inicial arbitraria.

En el sector moderno del Sur la tasa de crecimiento del producto, del capital, y del empleo viene dada por:  $\mathbf{s}'(k_M^*)\mathbf{p}(\mathbf{I}, k_N)$ . La tasa a la que cambia  $\mathbf{I}$  es por lo tanto la diferencia entre esta tasa y la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo,  $g$ . Por su parte la tasa de cambio de

$k_N$  es igual a la diferencia entre la inversión per capita en el Norte y la cantidad de nuevo capital que se requiere para mantener la relación  $k_N$  constante.

El sistema dinámico básico es por lo tanto:

$$\dot{\mathbf{l}} = [\mathbf{s}f'(k_M^*)\mathbf{p}(\mathbf{l}, k_N) - g]\mathbf{l} \quad (34)$$

$$\dot{k}_N = sq(k_N) - nk_N \quad (35)$$

Por consiguiente,  $\lambda$  y  $k_N$  pueden ser tomadas como las variables independientes del problema. Las variables  $L_N, K_N, L$  y  $K$  están dadas por la historia previa, en tanto que  $L_M$  está determinado por  $K$  y la relación capital trabajo  $k_M^*$  (correspondiente a cierto  $\bar{w}$ ).

Las propiedades de este sistema pueden ser analizadas por medio del diagrama de fase que aparece en la grafica 5. La curva de demarcación  $\dot{k}_N = 0$  implica simplemente, de acuerdo con (22) y (35), que  $k_N = k_N^* = \text{constante}$ , cuya gráfica es una recta vertical con  $k_N = k_N^*$ . La condición para que  $\dot{\mathbf{l}} = 0$ , es que  $\mathbf{p}$  esté en su valor de equilibrio  $\mathbf{p}^*$ . El locus  $\dot{\mathbf{l}} = 0$  muestra las combinaciones de  $\mathbf{l}$  y de  $k_N$  que mantienen los términos de intercambio en  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^*$ . La pendiente positiva de  $\dot{\mathbf{l}} = 0$  se deriva de la relación:<sup>27</sup>

$$\left. \frac{d\mathbf{l}}{dk_N} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^*} = - \frac{\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial k_N}}{\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{l}}} \quad (36)$$

El signo de (36) depende de los signos de las derivadas parciales  $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial k_N}$  y  $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{l}}$ . En la sección

E del Apéndice se encuentra que:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial k_N} > 0 \quad (37)$$

y

---

<sup>27</sup> Véase sección D del Apéndice.

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{I}} < 0 \quad (38)$$

De (37) y (38) se establece que (36) es mayor que cero y por lo tanto el locus  $\dot{\mathbf{I}}=0$  tiene pendiente positiva. La intuición de este signo es que un incremento en  $k_N$  mejora los términos de intercambio del Sur por arriba de  $\mathbf{p}^*$ , por lo que se tiene que dar un incremento en  $\mathbf{I}$  para restaurar nuevamente el equilibrio.

La intersección de los locus  $\dot{\mathbf{I}}=0$  y  $\dot{k}_N=0$  determina el punto de equilibrio  $E(\lambda^*, k_N^*)$  y en este punto encontramos los valores para el estado estable de  $\mathbf{I}=\mathbf{I}^*$  y  $k_N=k_N^*$ , mismos que ya habíamos obtenido en (32) y (22). Es posible demostrar mediante un análisis local de equilibrio que este punto es un nodo de equilibrio estable.<sup>28</sup> Los dos locus dividen el espacio de la gráfica 5 en cuatro regiones, etiquetadas con los números 1 a 4.

Si comenzamos en la intersección de las líneas  $\dot{\mathbf{I}}=0$ , y  $\dot{k}_N=0$  e incrementamos ligeramente  $k_N$ , entonces se incrementa el lado derecho de la ecuación (34), dado que  $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial k_N} > 0$ , por lo que tenemos que  $\dot{\mathbf{I}} > 0$  y por lo tanto  $\mathbf{I}$  es creciente en esa región. Por eso las flechas en esta región apuntan hacia el Norte. Un argumento simétrico implica que para puntos a la izquierda de la intersección de  $\dot{\mathbf{I}}=0$  y  $\dot{k}_N=0$ , las flechas apuntan hacia el Sur.

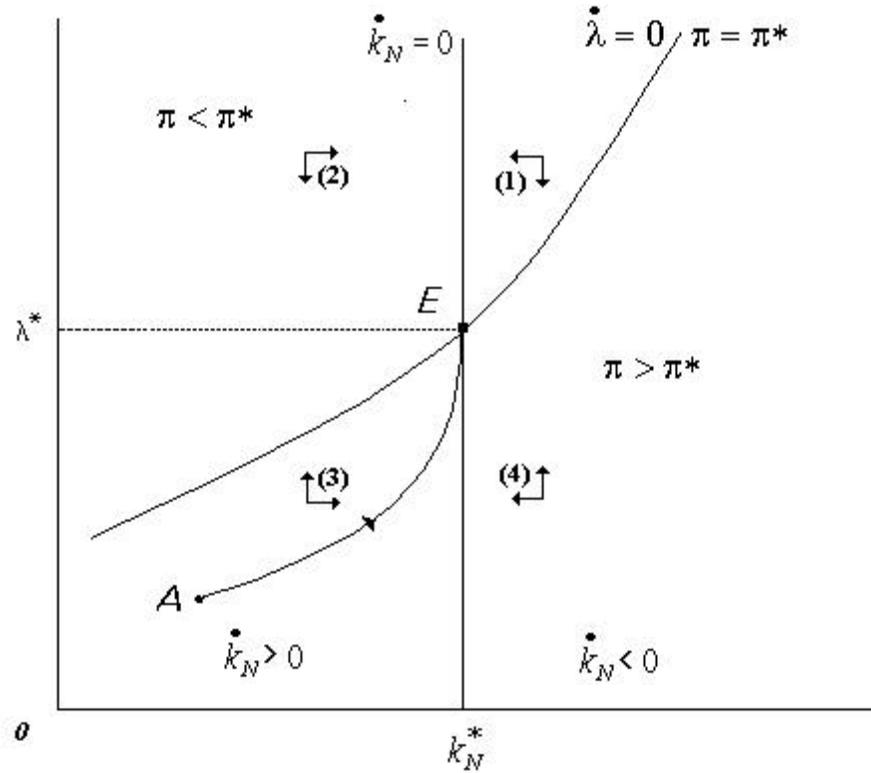
El locus  $\dot{k}_N=0$  es independiente de  $\mathbf{I}$ , este locus es una línea vertical situado en  $k_N^* = sq(k_N^*)/n$ . Puntos a la derecha de  $k_N^*$  implican que  $\dot{k}_N$  es negativo y por lo tanto las flechas apuntan hacia el Oeste; lo opuesto sucede para puntos a la izquierda de  $k_N^*$ .

En la región 1 las flechas combinadas apuntan hacia el Suroeste; en la región 2 hacia el Sureste; en la región 3 hacia el Noreste; y en la cuatro hacia el Noroeste.

La dinámica de la transición a los valores del estado estable ( $k_N^*$ ,  $\mathbf{I}^*$ ) se ilustra a continuación. Una posible trayectoria es desde una posición inicial arbitraria "A" que se indica por el trazo curvo con la flecha, que aparece en la Gráfica 5

<sup>28</sup> La prueba de estabilidad de este sistema aparece en la parte B del Apéndice.

Gráfica 5



Partiendo de un punto inicial  $A$  se muestra en la figura la trayectoria que lleva al punto de equilibrio  $E$ . En el punto “ $A$ ”  $\mathbf{p}$  está por arriba de  $\mathbf{p}^*$ <sup>29</sup> lo que significa que  $\mathbf{I}$  y  $k_N$  deben aumentar para que  $\mathbf{p}$  baje hasta que alcance el locus  $\dot{\mathbf{i}}=0$ , donde  $\mathbf{p}=\mathbf{p}^*$ . Puede observarse en la gráfica que durante el recorrido  $\mathbf{I}$  aumenta, indicando que el empleo del sector moderno  $L_M$  crece más rápido que el empleo total  $L$  del Sur. Ello implica, desde luego, un desarrollo creciente del sector moderno; sin embargo, nada garantiza que al llegar al punto de equilibrio  $E$  el sector moderno haya absorbido completamente al sector atrasado, ya que puede ocurrir que  $\mathbf{I}^* < 1$ . Puede apreciarse también en la gráfica que  $\mathbf{p}$  va disminuyendo, lo cual significa que los términos de intercambio se van deteriorando. Como consecuencia de lo anterior la tasa de ganancia  $r = \mathbf{p}^* f'(k_M^*)$  también disminuye, ya que  $k_M^*$  no cambia. La reducción de la tasa de ganancia a su vez implica que la tasa de crecimiento del capital, que según (12) está dada por  $\dot{K}/K = \mathbf{s}r$ , también disminuya.

<sup>29</sup> En la Gráfica 5 digamos que las coordenadas del punto  $A$  de son:  $\mathbf{I}^0$  y  $k_N^0$ . Para que a ese valor de  $k_N = k_N^0$  se esté sobre el locus  $\dot{\mathbf{i}}=0$  y  $\pi=\pi^*$ , se requiere un mayor valor de  $\mathbf{I}$  que  $\mathbf{I}^0$ . En “ $A$ ” el Sur está importando muy poco para el nivel de  $k_N^0$  y eso hace que se mejoren los términos de intercambio. Por lo tanto en “ $A$ ” los términos de intercambio son mayores que los de largo plazo. En general tenemos que cuando  $\mathbf{p} < \mathbf{p}^*$ ,  $\mathbf{I}$  está por debajo del locus  $\dot{\mathbf{i}}=0$  y cuando  $\mathbf{p} > \mathbf{p}^*$ ,  $\mathbf{I}$  está por encima.

Pasemos ahora a analizar el impacto de corto y largo plazo de cambios en algunos de los parámetros de la economía del Sur. Los cambios de los parámetros que consideraremos son: un aumento del salario real; un incremento en la propensión al ahorro de los capitalistas; y mejoras en la productividad del sector moderno. La posición inicial para todos los casos será la del estado estable ( $\mathbf{I}^*, k_N^*$ ).

Consideremos ahora un incremento en el salario real,  $\bar{w}$ , este incremento aumenta la relación capital trabajo en el sector moderno del Sur y reduce la productividad marginal del capital,  $f'(k_M^*)$ . Por (30) esto significa en una elevación de  $\mathbf{p}^*$ , proporcional a la caída de  $f'(k_M^*)$ , por lo que la tasa de ganancias permanece constante:  $r = \mathbf{p}^* f'(k_M^*)$ . El mayor nivel de  $\mathbf{p}^*$  se traduce en un desplazamiento hacia abajo de la curva de demarcación  $\dot{\mathbf{I}} = 0$ . El locus de  $\dot{k}_N = 0$  no se modifica<sup>30</sup> al cambiar  $\bar{w}$ , por lo que  $\mathbf{I}^*$  disminuye.

Un incremento en  $\bar{w}$ , mejora los términos de intercambio en el largo plazo para el Sur, pero reduce la participación relativa del sector moderno en el empleo.<sup>31</sup> La razón de esto es la siguiente: con términos de intercambio fijos, la oferta de manufacturas permanece constante ( $\bar{w}$  no afecta el ingreso del Norte) pero un valor mayor de  $\bar{w}$  hace que aumente la demanda de importaciones de los trabajadores, y también provoca que aumente  $k_M^*$ , lo que hace que se demanden mayores importaciones de bienes de capital (la demanda de consumo de los capitalistas queda indeterminada ya que el ingreso de los capitalistas se reduce en términos de bienes primarios). Pero de acuerdo con (34)  $\mathbf{p}$  debe de incrementarse para compensar la caída en  $f'(k_M^*)$  por ello se necesita que las importaciones se reduzcan con relación a la situación inicial, no que aumenten, lo que requiere que  $\mathbf{I}^*$  disminuya ( $\mathbf{p}^*/\mathbf{I}^* < 0$ ). Al subir los salarios la tasa de acumulación no se altera ya que  $\mathbf{s}^r$  permanece constante, la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo tampoco cambia, ¿entonces porqué se reduce  $\mathbf{I}^*$ ? Lo que reduce la participación del sector moderno en la economía es el aumento de la relación capital trabajo en el Sur.

El efecto de un incremento en  $\bar{w}$  sobre el ingreso relativo entre el Sur y el Norte, tanto en términos absolutos como per capita, es ambiguo ya que si bien los cambios en  $\mathbf{p}^*$  y  $f'(k_M^*)$  se neutralizan mutuamente,  $k_M^*$  aumenta y  $\mathbf{I}^*$  disminuye, por lo que la dirección del cambio en (33a) y (33b) es también ambigua.

Consideremos ahora un incremento en la propensión a ahorrar de las ganancias en el Sur. Un incremento en  $\mathbf{s}$  lleva a través de (30) a una caída de  $\mathbf{p}^*$  en la misma proporción. La tasa de ganancia  $r = \mathbf{p}^* f'(k_M^*)$  se reduce con la caída en  $\mathbf{p}^*$ ; sin embargo, la tasa de acumulación en el Sur permanece constante;  $\mathbf{s}^r$  no cambia dado que un incremento en  $\mathbf{s}$  es compensado por una caída en  $\mathbf{p}$  en la misma proporción.

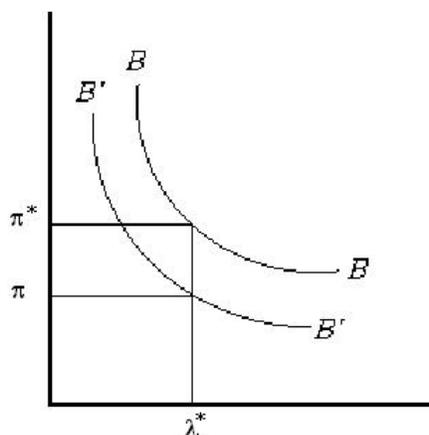
<sup>30</sup> Los cambios en los parámetros del Sur no afecta el locus  $\dot{k}_N = 0$ , por lo tanto no afectan el valor  $k_N^*$ .

<sup>31</sup> De acuerdo con (38) al elevarse  $\pi^*$  debe de reducirse  $\mathbf{I}^*$ .

Con términos de intercambio constantes, un incremento en  $s$  hace que aumente la acumulación y por lo tanto la participación del sector moderno en la economía del Sur, lo que provoca mayor demanda de importaciones<sup>32</sup>, y una tendencia al déficit comercial. Sin embargo, como no hay préstamos internacionales, lo que sucede es que se deterioran los términos de intercambio, y esto hace que las importaciones del Norte aumenten y las del Sur se repriman, el efecto neto de  $s$  sobre  $I$  es ambiguo. Para ver este fenómeno en mayor detalle hacemos uso de la gráfica 6.

En la Gráfica 6 la curva  $BB$  muestra las combinaciones de  $p$  y  $I$  que mantienen equilibrio en la balanza comercial cuando la relación capital trabajo en el Norte está en su nivel del estado estable,  $k_N^*$ . La pendiente negativa se desprende de  $\frac{dp}{dI} < 0$ . A unos términos de intercambio dados, un aumento en  $s$  hace que aumenten las importaciones, por lo que para mantener equilibrio de la balanza comercial, se requiere que  $I$  se reduzca, por lo  $BB$  se desplaza hacia abajo y hacia la izquierda hasta  $BB'$ .

Gráfica 6



En el corto plazo  $I^*$  permanece constante, de manera que  $p$  es la que debe ajustarse, por lo que  $p$  cae al valor correspondiente sobre la curva  $BB'$ . Esta caída puede ser mayor o menor a la caída en el valor de largo plazo de  $p^*$  de acuerdo con (30), que es proporcional a la subida de  $s$ . El nuevo valor de largo plazo de  $I^*$  estará en el punto  $BB'$  correspondiente a este nuevo valor de largo plazo de  $p^*$ . La economía del Sur debe moverse a lo largo de  $BB'$  en la dirección necesaria para llegar a este punto, el nuevo valor de  $I^*$  será mayor o menor al inicial dependiendo de si el efecto de corto plazo sobre  $p$  es menor o mayor que el de largo o plazo.

El efecto de cambios en  $s$  sobre el ingreso relativo del Sur con respecto al Norte, tanto total como per capita, es ambiguo. Esto se debe a que una mayor propensión al ahorro en el Sur reduce la tasa de ganancias a través del deterioro de los términos de intercambio y

<sup>32</sup> El incremento en los ahorros se gasta todo en importaciones, mientras que antes esas ganancias se gastaban en bienes de consumo y sólo parte de ese gasto se realizaba en importaciones.

esto puede alterar la participación del sector moderno en el empleo.  $p^*$  se deteriora pero  $\lambda^*$  puede aumentar, por lo que de acuerdo con (33a) y (33b) el efecto neto para el Sur es ambiguo. Mayores ahorros, todo lo demás constante, llevan a que el sector moderno crezca con respecto al atrasado y esto haría que aumentara el ingreso relativo del Sur con respecto al Norte; sin embargo, el aumento de la proporción de las ganancias ahorradas deteriora los términos de intercambio, y puede o no expandir la participación relativa del sector moderno, quedando incierto lo que pasa con el ingreso nacional a precios mundiales.

Consideremos ahora el efecto de cambios tecnológicos en el Sur sobre el sistema económico. Una manera de introducirlos es considerar un cambio tecnológico que se da una sola vez, y que puede expresarse como un aumento en la productividad marginal del capital. De acuerdo con (30) este cambio reduciría  $p^*$  en la misma proporción que en la que se dio el aumento de la productividad.

Con términos de intercambio constantes, un incremento en  $f'(k_M^*)$  hace que aumente la participación del sector moderno en la economía del Sur,  $I$ , y esto hace que aumente la demanda de importaciones<sup>33</sup>, lo que presiona la balanza comercial, y provoca un deterioro de los términos de intercambio. El deterioro de los términos de intercambio neutralizan el efecto de un incremento de  $f'(k_M^*)$  sobre  $r$  lo que a su vez neutraliza el aumento en  $\lambda$ . El efecto total de un cambio tecnológico de este tipo sobre  $I^*$  es ambiguo. Esto puede mostrarse una vez más por medio de la gráfica 6.

El efecto de un cambio tecnológico es análogo al de un cambio en la propensión a ahorrar del Sur y puede representarse mediante la misma gráfica. Con términos de intercambio constantes, un mayor ingreso en el Sur provocado por un aumento de la productividad en el sector moderno, hace que aumenten las importaciones, lo que requiere que  $I$  se reduzca para equilibrar la balanza comercial. Esto hace que la curva  $BB$  se desplace hacia abajo y hacia la izquierda. El nuevo valor de  $I^*$  será mayor o menor al inicial dependiendo de sí el efecto de corto plazo de un cambio tecnológico sobre  $p$  es menor o mayor que el de largo o plazo.

El efecto de este tipo de cambio tecnológico sobre el ingreso relativo, tanto total como per capita, del Sur con respecto al Norte también es ambiguo. De acuerdo con (30)  $p^*$  se deteriora en la misma proporción que  $f'(k_M^*)$  aumenta, por lo que ambos movimientos se cancelan mutuamente, de acuerdo con (4)  $k_M^*$  aumenta, pero como hemos visto  $\lambda^*$  puede aumentar o disminuir, por lo que de acuerdo con (33a) y (33b) no se sabe qué pasa con el ingreso relativo del Sur, tanto en términos absolutos como per capita.

Estos resultados obligan a hacer algunas reflexiones.

En el modelo que hemos construido, el comercio es el motor del crecimiento para la economía del Sur, pero la potencia se la da el crecimiento del Norte. Para el Sur el crecimiento depende

<sup>33</sup> El incremento en los ahorros se invierte y por lo tanto se gasta todo en importaciones, mientras que antes esas ganancias se gastaban en bienes de consumo y sólo parte de ese gasto se realizaba en importaciones.

de cuántos bienes de capital pueden obtenerse, y esto depende de la tasa de crecimiento del Norte. Los términos de intercambio son los que aseguran que la tasa de crecimiento del Sur se conforme a la tasa de crecimiento del Norte.

En el largo plazo el empleo relativo del sector moderno en el empleo total del Sur está gobernado por la capacidad de esta región de importar bienes de capital del Norte, capacidad que está gobernada por  $\mathbf{p}^*$  y  $k_N^*$ .

La ecuación (30) muestra que un incremento en  $\mathbf{s}$  y  $f'(k_M^*)$ , esto es, una mayor frugalidad y productividad en el Sur, reducirá  $\mathbf{p}^*$  en la misma proporción y dejará inalterada la tasa de crecimiento en el Sur, sin que necesariamente se altere la participación del sector moderno en esa economía.

La economía del Sur puede lograr que en ciertos momentos aumente el valor de  $\mathbf{I}^*$ , sin embargo en el largo plazo los movimientos en los términos de intercambio impiden el crecimiento relativo del sector moderno. La modernización<sup>34</sup> de una economía que normalmente se da cuando aumenta la frugalidad o la productividad del sector moderno, no necesariamente ocurren en una economía atrasada grande y abierta.

---

<sup>34</sup> Entendiendo por modernización la reducción relativa del sector atrasado de una economía.

## VI. MOVIMIENTOS INTERNACIONALES DE CAPITAL<sup>35</sup>

En esta sección mantenemos el supuesto de una economía grande y supondremos además que existe libre movilidad de capital. En ausencia de estos movimientos mantenemos la presunción de que la tasa de ganancia en el Sur es mayor a la del Norte, esto es  $r > r_N$ ; <sup>36</sup> por lo que el capital se mueve del Norte hacia el Sur hasta que  $r = r_N$ . Las manufacturas continúan siendo producidas sólo en el Norte, pero existe un enclave del Norte en el Sur, donde se producen bienes primarios usando las mismas funciones de producción y pagando el mismo salario que lo hacen los capitalistas del Sur

En el estado estable, el capital en el Sur debe de crecer a la misma tasa  $n$  que el crecimiento de la fuerza de trabajo del Norte. <sup>37</sup> El crecimiento de la fuerza de trabajo del Norte<sup>38</sup> sigue siendo el único determinante de la expansión de la economía mundial.

De acuerdo con (30), los términos de intercambio en el estado estable no se ven afectados por movimientos de capital y siguen siendo iguales a  $\underline{p}^*$ . De la misma manera la tasa de ganancias que se obtiene en el Sur dado un salario real  $\underline{w}$ , sigue siendo  $r = \underline{p}^* f'(k_M^*)$ , donde  $k_M^*$  es la relación capital trabajo que maximiza las ganancias en el sector moderno de esa región, a ese salario; por lo tanto, la movilidad del capital no afecta  $r$ .

Bajo estas condiciones y posibilidades que ofrece el Sur, el Norte invertirá en manufacturas en su país hasta el punto en el que  $q'(k_N^*) = r$ , donde  $k_N^*$  es la relación capital trabajo en las manufacturas que hacen que el producto marginal del capital en el Norte sea igual a  $r$ , la tasa de ganancias del Sur.

Sin embargo, la cantidad de capital per capita que los ciudadanos del Norte desean mantener, es,  $k_{NN}^* \cdot k_{NN}^*$  es el valor de  $k_{NN}$  con la cual se logra que  $sh(k_{NN}^*) = nk_{NN}^*$ . Donde  $h(k_{NN}) = y_N$ , es el ingreso per capita del Norte, el cual está formado de la suma de los ingresos derivados de la producción interna de manufacturas y de los rendimientos del capital invertido en el Sur, en la producción de productos primarios. Por lo que  $sh(k_{NN})$  es la inversión per capita en el Norte, en tanto que  $nk_{NN}$ , nos indica cuánto tiene que invertirse en el Norte para mantener la riqueza per capita al nivel existente.

Lo que lleva a que  $(k_{NN}^* - k_N^*)$  sea la cantidad de capital por habitante del Norte que debe invertirse en el Sur en la producción de bienes primarios en el estado estable. La relación entre  $k_{NN}^*$  y  $k_N^*$  se presenta en la gráfica 7, la cual muestra al ingreso per capita en función de la relación capital trabajo. La inversión extranjera hace que esta función tenga a la

<sup>35</sup> Esta sección está inspirada en Findlay (1984), p. 226-229, (1992) y (1996).

<sup>36</sup> Donde  $r_N$  es la tasa de ganancia en el Norte.

<sup>37</sup> De acuerdo con (13) y (25), en el estado estable  $g_K \equiv \dot{K}(t)/K(t) = \underline{sp}^* f'(k_M^*)$  y de acuerdo con (30) que:  $g_K = n$ . Si  $g \neq n$ , entonces  $g_K = \frac{n - (1 - a_K)g}{a_K}$ .

<sup>38</sup> Eliminamos el supuesto de que en el Norte existe progreso técnico aumentador de trabajo.

derecha de  $k_N^*$ , una pendiente positiva constante igual a  $r$ . Para conservar la dualidad en la economía del Sur supondremos que  $sr < n$ .<sup>39</sup>

En forma específica, el ingreso per capita del Norte en el estado estable es igual a:

$$y_N^* = q(k_N^*) + r(k_{NN}^* - k_N^*), \quad (39)$$

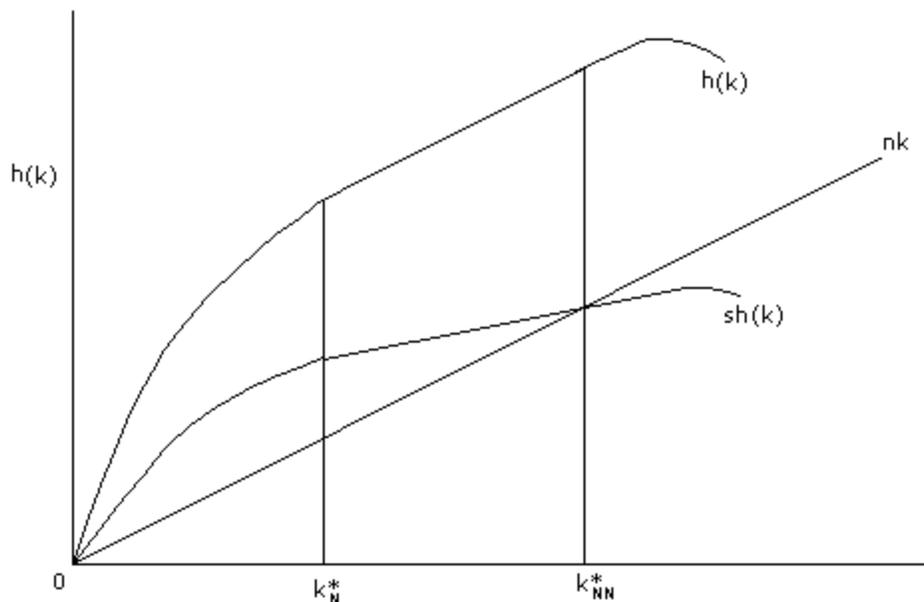
Donde el primer término es el producto interno por habitante de manufacturas y el segundo es el ingreso por habitante de la inversión extranjera en producción de productos primarios. De  $p^*$  y  $y_N^*$  se puede determinar para el Norte tanto la demanda de importaciones per capita,  $m^*$  como el consumo interno de manufacturas  $c^*$ . La balanza de pagos para el Norte viene dada por:

$$X^* + r(k_{NN}^* - k_N^*) = m^* + n(k_{NN}^* - k_N^*) \quad (40)$$

Donde  $x^*$  son las exportaciones per capita en el Norte. El lado derecho es la suma de exportaciones e ingreso derivado de la inversión extranjera. Ambos conceptos sirven para financiar tanto las importaciones de consumo,  $m^*$ , como los requerimientos de expansión del enclave en el Sur,  $n(k_{NN}^* - k_N^*)$ . También es cierto que las exportaciones son iguales a la producción de manufacturas menos el consumo e inversión internos.

$$X^* = q(k_N^*) - c^* - nk_N^* \quad (41)$$

Gráfica 8



<sup>39</sup> Si esta condición no se cumpliera la acumulación de capital en el Norte no estaría acotada. El equilibrio sólo se lograría una vez que en el Sur desapareciera el sector atrasado, haciendo que el salario real aumentara y que la tasa de ganancias disminuyera. Por lo tanto para conservar la dualidad de la economía del Sur en el "estado estable" se tiene que suponer que  $sr < n$ .

Veamos ahora la situación en el enclave del Norte en el Sur. La cantidad de capital total del Norte invertida en el Sur es igual a  $[(k_{NN}^* - k_N^*)L_N]$ , en tanto que el empleo total en el enclave generado por esta inversión es  $L_e = \{[(k_{NN}^* - k_N^*)L_N]/k_M^*\}$ . De donde se desprende que el empleo en el enclave por cada trabajador en el Sur es  $I_e^* \equiv L_e/L = [(k_{NN}^* - k_N^*)f/k_M^*]$ .<sup>40</sup>

La demanda de inversión en el enclave requerida para mantener constante la relación capital trabajo es igual a  $n$  veces  $k_M^* L_e$ . Expresada esta demanda en términos de bienes primarios, es igual a  $\pi^* n k_N^*$ , y la demanda de consumo de manufacturas de los trabajadores en el enclave, expresada también en productos primarios, es  $m$  veces  $L_e$ .

De esto se desprende que la cantidad de manufacturas disponible para el Sur, una vez que se han satisfecho en el Norte las necesidades de consumo e inversión internas, así como la demanda tanto de consumo como de inversión en su enclave del Sur, es:

$$\pi^* [q(k_N^*) - n k_N^* - c^*] L_N - [m_L(\mathbf{p}^*, \bar{w}) + \mathbf{p}^* n k_M^*] L_e.$$

Por su parte la demanda de manufacturas por parte de los capitalistas del Sur tanto para consumo como para inversión, así como las demandas de importaciones del resto de los trabajadores del Sur, tanto en el sector moderno como en el atrasado, son:

$$[\mathbf{p}^* n k_M^* + m_K(\mathbf{p}^*, k_M^*)] L_M + m_L(1/\mathbf{p}^* \bar{w}) (L - L_e).$$

El equilibrio de la economía mundial requiere que:

$$\mathbf{p}^* [q(k_N^*) - n k_N^* - c^*] L_N - [m_L(\mathbf{p}^*, \bar{w}) + \mathbf{p}^* n k_M^*] L_e = [\mathbf{p}^* n k_M^* + m_K(\mathbf{p}^*, k_M^*)] L_M + m_L(\mathbf{p}^*, \bar{w}) (L - L_e) \quad (42)$$

La ecuación (42) puede ser reagrupada como:

$$\mathbf{p}^* [q(k_N^*) - n k_N^* - c^*] L_N - \mathbf{p}^* n k_M^* L_e = [\mathbf{p}^* n k_M^* + m_K(\mathbf{p}^*, k_M^*)] L_M + m_L(\mathbf{p}^*, \bar{w}) L \quad (43)$$

$$\mathbf{p}^* [q(k_N^*) - n k_N^* - c^*] L_N - \mathbf{p}^* n k_M^* L_e - m_L(\mathbf{p}^*, \bar{w}) L = [\mathbf{p}^* n k_M^* + m_K(\mathbf{p}^*, k_M^*)] L_M$$

De donde podemos determinar que el empleo en relativo en el sector capitalista del Sur es:

$$I_M^* \equiv \frac{L_M}{L} = \frac{\mathbf{p}^* [q(k_N^*) - n k_N^* - c^*] f - \mathbf{p}^* n k_M^* I_e - m_L(\mathbf{p}^*, \bar{w})}{\mathbf{p}^* n k_M^* + m_K(\mathbf{p}^*, k_M^*)} \quad (44)$$

<sup>40</sup> Donde  $f$  tiene el mismo significado que en la sección anterior, es el cociente entre el trabajo del Norte y el trabajo del Sur:  $f \equiv L_N(t)/L(t)$ .  $f$  es constante si  $n=g$ .

El numerador de (44) tiene que ser necesariamente positivo para que  $I_S^*$  lo sea. Lo que implica es que existe un exceso de oferta de manufacturas en el Norte después de que su demanda interna, la demanda de capital del enclave y las demandas de importaciones de todos los trabajadores del Sur han sido satisfechas, todo medido en unidades por trabajador en el Sur. Esto es, siempre queda algo para satisfacer la demanda de importaciones de manufacturas de los capitalistas del Sur, tanto para inversión como para consumo.

Los capitalistas del Sur tienen que competir con el enclave en el mercado de productos primarios del Norte para conseguir sus requerimientos de manufacturas y esto tiene consecuencias importantes para el destino del Sur.

La movilidad del capital reduce por un lado la producción de manufacturas y por otro, el mayor ingreso en el Norte incrementa el consumo doméstico de estos bienes, por lo que se restringe la oferta de manufacturas para el resto del mundo, o lo que es lo mismo, se reduce el mercado de los productos producidos por el capital del Sur que sólo pueden ser vendidos si se reduce su precio.

Consideremos un incremento en  $s$ . Es evidente a partir de la gráfica 7 que  $k_N^*$  no cambia mientras que  $k_{NN}^*$ ,  $y_N^*$  y el consumo per capita se incrementan (dado que siempre estamos a la derecha de la regla de oro,  $r > n$ .<sup>41</sup>). Esto significa que en el numerador de (44)  $q(k_N^*)$ ,  $n k_N^*$  y  $m_L(\mathbf{p}^*, \bar{w})$ <sup>42</sup> permanecen constantes, mientras que  $c^*$  y  $I_e^*$  se incrementan. Dado que el denominador de (44) tampoco cambia, tenemos que  $I_S^*$  se reduce en respuesta a un incremento en  $s$ .

Un aumento en la inversión en el Norte aumenta la participación del empleo del enclave en el empleo total del Sur pero reduce la participación del sector moderno que es controlado por los capitalistas locales. El efecto neto de un aumento de la inversión en el Norte sobre la expansión relativa del sector moderno en el Sur, dependerá de la fuerza relativa de cada efecto.

El sector moderno del Sur como un todo se expande, si la suma de  $I_M^* + I_e^* = (L_M + L_e)/L \equiv \lambda$  aumenta como consecuencia de un aumento en la inversión en el Norte. En la sección G del Apéndice se demuestra, después de algunas manipulaciones, que la suma de  $I_M^*$  y  $I_e^*$ , esto es, empleo en el sector moderno del Sur en relación al empleo total, decrece al aumentar  $s$ . El incremento en  $I_e^*$  es menor que la caída en  $I_S^*$ .

Dado que las oportunidades de inversión en la producción de manufacturas son menores a lo que se obtiene como rendimiento en la producción de productos primarios, el capital fluye del Norte hacia el Sur, compitiendo con el capital local. La movilidad del capital

<sup>41</sup> Véase Romer (1996), p. 18.

<sup>42</sup> Por (29)  $s$  no afectó  $\mathbf{p}^*$ .

reduce por un lado la producción de manufacturas y por otro, el mayor ingreso en el Norte incrementa el consumo doméstico de estos bienes, por lo que se restringe la oferta de manufacturas para el resto del mundo, o lo que es lo mismo, se reduce el mercado de los productos primarios. El capital del Sur no sólo ve restringido su mercado de exportación sino que además tiene que competir con la producción del enclave por ese menor mercado. El capital del Norte no sólo desplaza al capital del Sur sino que la inversión total disminuye. .

Esencialmente la misma intuición explica otro hecho sorprendente. La movilidad del capital reduce el empleo y el ingreso relativo real del Sur con respecto al Norte (incluyendo el ingreso salarial del enclave). La razón de esto es simplemente que al disminuir  $\lambda$  y dado que  $s$  no afecta  $p$ , se puede mostrar que el ingreso per capita del Sur disminuye,<sup>43</sup> mientras que por la gráfica 8 sabemos que al incrementarse  $s$ , aumenta el ingreso per capita en el Norte.

## VII. CONCLUSIONES

De acuerdo con nuestro análisis el ingreso per capita de una economía atrasada depende de la tasa de salario, de la tasa de ganancias y de la relación capital trabajo de esa economía. La elevación de cada uno de ellos nos lleva a un aumento del ingreso per capita. Mientras exista exceso de mano de obra en una economía cerrada, o en una economía pequeña abierta, los salarios y la tasa de ganancias permanecen fijos, por lo que el crecimiento del ingreso per capita depende sólo de la relación capital-trabajo de la economía.<sup>44</sup>

Esta conclusión se modifica si consideramos progreso técnico. El progreso técnico siempre eleva el ingreso per capita no importa el sector en el que se registre. Este punto es importante ya que recientemente algunos países en desarrollo, en lugar de concentrarse exclusivamente en la expansión del sector moderno para lograr el crecimiento, han comenzado a considerar el fomento de la productividad del sector atrasado como forma complementaria de lograr este objetivo, y como una forma de combate a la pobreza.

Al considerar el comercio en nuestro modelo, encontramos que una economía con excedentes de mano de obra, ésta se especializa en la producción de ciertos bienes intensivos en mano de obra, y que dicha especialización no cambia mientras existan excedentes de mano de obra.

Al abandonar el supuesto de economía pequeña y considerar los cambios en los términos de intercambio algunos de los resultados anteriores se modifican sustancialmente. Una mayor frugalidad y productividad en el Sur, deteriora los términos de intercambio en la misma proporción y dejan la tasa de crecimiento del Sur sin cambios. Cambios en estos parámetros pueden servir para aumentar por una sola vez la participación del sector moderno en el empleo, pero no pueden sostener un continuo crecimiento de este sector. Los términos de intercambio sirven como regulador para lograr que la tasa de crecimiento del Sur se adapte

---

<sup>43</sup> Véase ecuación (8)

<sup>44</sup> Véase ecuación (9).

a la tasa de crecimiento del Norte. Para el Sur el comercio es “el motor del crecimiento” ya que de él depende cuantos bienes de capital pueden obtenerse, pero la potencia del motor esta determinada por la tasa de crecimiento del Norte.

Finalmente, cuando consideramos los movimientos internacionales de capital encontramos que al darse estos movimientos, el capital del Norte desplaza al capital del Sur, y el sector moderno de esta economía se contrae. También como consecuencia de estos movimientos se reduce el ingreso relativo real del Sur con respecto al Norte.

## Referencias

Aghion Philippe y Peter Howitt (1998), Endogenous Growth Theory, MIT Press.

Bacha, E. (1978), "An interpretation of unequal exchange from Prebisch-Singer to Emmanuel", *Journal of Development Economics*, 5:319-330.

Baldwin R. E., P. Martin, y G. Ottaviano, (1998) "Global Income Divergence, Trade and Industrialization: The Geography of Growth Take-Offs", NBR, Working Paper No. W6458

Barro J. R. y Xavier Sala -i-Martin, (1995), Economic Growth, McGraw-Hill.

Burgstaller Andre (1987), "Industrialization, Deindustrialization, and North-South Trade". *American Economic Review*, Volume 77, Issue 5: 1017-1018.

Davis, Donald R. (1997), *Critical Evidence on Comparative Advantage? North-North Trade in a Multilateral World*.

Díaz-Alejandro Carlos F. (1975), "North South relations: the economic component", en World Politics and International Economics, Bergsten, C.F. y L.B. Krause (Editores), Brookings Institution.

Dixit A.K. y Victor Norman. (1980), Theory of International Trade. Cambridge England, Cambridge University Press.

Dixit, A.K. (1982), "Growth and terms of trade under perfect competition" , working paper, Princeton University, Economics Department.

Findlay R. (1973), International Trade and Development Theory, Columbia University Press, New York.

\_\_\_\_\_ (1980), "The terms of trade and equilibrium growth in the world economy", *American Economic Review*, Volumen 70, Issue 3: 291-299.

\_\_\_\_\_ (1984), "Growth and Development in Trade Models", en Handbook of International Economics, Vol I. Ed. Ropnald W. Jones y Peter B. Kenen.

\_\_\_\_\_ (1992), "The Roots of Divergence: Western Economic History in Comparative Perspective", *American Economic Review*, Volume 82, Issue 2: 158-161.

\_\_\_\_\_ (1996), "Modeling Global Interdependence: Centers, Peripheries, and Frontiers", *American Economic Review*, Volume 86, Issue 2: 47-51.

Helliwell J.F., y A.Chung (1995), *Convergence and Growth Linkages Between North and South* en *North-South linkages and International Macroeconomic Policy*, editado por, Vines, Davidand David Currie. Cambridge University Press. Pp. 77-100.

Helpman, Elhanan (1984), "The Factor Content of Foreign Trade", *Economic Journal*, 94, 84-94.

Helpman Elhanan y Paul Krugman (1991), Market Structure and Foreign Trade, The MIT Press.

Habakkuk H.J. (1962), American and British Technology in the Nineteenth Century: The Search for Labour-Saving Inventions, New York: Cambridge University Press.

Hicks, John. R. (1946), Value And Capital, 2a. ed., Oxford University Press, Londres,

Inada, Kenichi, (1964), "Some structural characteristics of turnpike theorems", *Review of Economic Studies*, 31 (enero): 45:38.

Krugman, P. (1994), Rethinking International Trade, MIT Press.

\_\_\_\_\_ (1982), "Trade, accumulation and uneven development", *Journal of Development Economics*, 8:149-161.

\_\_\_\_\_ y A. Venables (1995), "Globalization and Inequality of Nations", *Quarterly Journal of Economics*, Vol 110, no. 4.

Lewis W.A. (1954), "Economic development, with unlimited supplies of labour", The Manchester School. Reproducido en Readings in Economic Development, editado por Theodore Morgan, George W. Betz y N.K. Choudhry, Wadsworth Publishing Company, Inc., 1963.

Lewis, A. (1958a), "Unlimited labor: further notes", *The Manchester School of Economic and Social Studies*, 28 (May): 139-91.

\_\_\_\_\_ (1958b), "Reflectiones on unlimited labor", en: V. di Marco, de. *International Economics and Development* (Wiley, New York).

Mankiw, N. Gregory, David Romer, y David N. Weil, (1992), "A contribution to the empirics of economic growth", *Quarterly Journal of Economics*, 107 (mayo); 407-437.

Markusen J.R. y Melvin J.R. (1984 ), The Theory of International Trade, Harper & Row.

Romer, P.M. (1996), Advanced Macroeconomics, McGraw Hill.

Romero, J.A. (2001a), Sustitución de Importaciones y Apertura Comercial: Resultados para México, en Alicia Puyana (Editor) Integración Económica Regionalización y Globalización: Instituciones, Estado y Economía, FLACSO , México.

\_\_\_\_\_ (2001b), Estrategias De Crecimiento En Economías Duales, *Revista de Estudios Sociológicos*, El Colegio de México.

Ros, Jaime (1997), Increasing Returns, Development Traps, and Economic Growth, Borrador para discusión.

Uselding, Paul (1972) "Factor Substitution and Labor Productivity Growth in American Manufacturing, 1839-1899," *Journal of Economic History*, vol. XXXII, no. 3.

Solow, R.M. (1956), "A contribution to the theory of economic growth", *Quarterly Journal of Economics*, 70 : 65-94.

Swan, T. W. (1956), "Economic growth and capital accumulation", *Economic Record* 32 : 334-361.

Tuirán, R., Virgilio Partida y José Luis Ávila (2000), "Crecimiento Económico, Libre Comercio y Migración", en *Migración México-Estados Unidos, Presente y Futuro*, CONAPO.

## Apéndice

### A. Derivación de la ecuación (4).

Si  $\bar{w}$  representa el salario pagado en el sector moderno, las ganancias obtenidas en este sector son entonces:

$$G = Y_M - \bar{w}L_M$$

La condición de maximización de ganancias es  $\frac{\partial G}{\partial L_M} = 0$ , es decir,  $\frac{\partial Y_M}{\partial L_M} - \bar{w} = 0$ , con lo

que:

$$\frac{\partial Y_M}{\partial L_M} = \bar{w} \tag{A1}$$

Aquí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_M}{\partial L_M} &= \frac{\partial}{\partial L_M} [L_M f(k_M)] = L_M \frac{\partial f(k_M)}{\partial L_M} + f(k_M) = L_M \frac{df(k_M)}{dk_M} \frac{\partial k_M}{\partial L_M} + f(k_M) = \\ &= L_M f''(k_M) \left(-\frac{K}{L_M^2}\right) + f(k_M) = f(k_M) - k_M f''(k_M) \end{aligned}$$

La ecuación (4) puede escribirse entonces:

$$f(k_M) - k_M f''(k_M) = \bar{w} \tag{A2}$$

Dado que  $\bar{w}$  es fijo, (A2) constituye una ecuación para  $k_M$  cuya solución será representada en la forma  $k_M = k_M^*$ . La razón capital-trabajo del sector moderno del Sur,  $k_M^*$ , queda así determinada por la condición de optimización de ganancias en ese sector.

### B. Demostración de que $r=f'(k_M)$ es la tasa de ganancias.

Podemos definir las ganancias como:  $G=Y_M(K,L_M)-\bar{w}L_M$ . La condición de maximización requiere que:  $\frac{\partial G}{\partial L_M} = \frac{\partial Y_M}{\partial L_M} - \bar{w} = 0 \rightarrow \bar{w} = \frac{\partial Y_M}{\partial L_M}$ , y,  $Y_M(K,L_M) = L_M Y_M'(k_M)$ , por lo que esta condición de maximización puede reescribirse como:

$$\bar{w} = \frac{\partial Y_M}{\partial L_M} = L_M y_M'(k_M) \frac{dk_M}{dL_M} + y_M(k_M) = y_M(k_M) + L_M y_M'(k_M) \left(\frac{K}{L_M^2}\right) = y_M(k_M) + k_M y_M'(k_M)$$

Por lo tanto:

$$r = \frac{G}{K} = \frac{Y_M(K, L_M) - \bar{w}L_M}{K} = \frac{L_M y_M(k_M) - \bar{w}L_M}{K} = \frac{y_M(k_M) - \bar{w}}{k_M} =$$

$$= \frac{y(k_M) - [y(k_M) - k_M y_M'(k_M)]}{k_M} = y_M'(k_M) \equiv f'(k_M).$$

### C. Participación de las ganancias en el ingreso del sector y en el ingreso total.

La participación de las ganancias en el ingreso del sector moderno no cambia:  $\frac{G}{Y_M} = \frac{G}{K} \frac{K}{L_M} \frac{L_M}{Y_M} = rk_M \left(\frac{1}{y_M}\right) = \frac{rk_M}{f(k_M)}$ ; dado que  $\bar{w}$  es constante,  $k_M$  y  $r$  están fijas, y por lo tanto tampoco  $G/Y_M$ . En contraste, la participación de las ganancias en el ingreso nacional aumenta al crecer el sector moderno, esto es:  $\frac{G}{Y} = \frac{G}{K} \frac{K}{L} \frac{L}{Y} = rk \left(\frac{1}{y}\right) = \frac{rk}{y} = \frac{rk}{w + rk} = \frac{1}{\frac{w}{rk} + 1}$ ;

conforme  $k$  crece, el denominador de la última expresión disminuye, y  $G/Y$  crece.

### D. Derivación de la ecuación (36)

La curva de demarcación  $\dot{\mathbf{I}} = 0$  corresponde, según (31) y (30), a la condición  $\mathbf{p}(\mathbf{I}, k_N) = \mathbf{p}^*$ . Esta última relación define a  $\lambda$  como función implícita de  $k_N$ :  $\mathbf{I} = \mathbf{I}(k_N)$ . Derivando implícitamente la relación  $\mathbf{p}(\mathbf{I}, k_N) = \mathbf{p}^*$  respecto de  $k_N$ , se obtiene:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{I}} \frac{d\mathbf{I}}{dk_N} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial k_N} = 0$$

con lo cual:

$$\left. \frac{d\mathbf{I}}{dk_N} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^*} = - \frac{\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial k_N}}{\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{I}}}$$

### E. Signo de la ecuación (36).

Las derivadas parciales de  $\mathbf{p}(\mathbf{l}, k_N)$  pueden obtenerse derivando implícitamente la ecuación de balanza comercial equilibrada (28), recordando que  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^* = \text{constante}$ . Así, derivando implícitamente a (28) respecto de  $\mathbf{l}$  se tiene:

$$\mathbf{p}^* \frac{\partial m}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{l}} \mathbf{f} = \mathbf{p}^* f'(k_M^*) k_M^*$$

con lo que:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{l}} = \frac{\mathbf{p}^* f'(k_M^*) k_M^*}{\mathbf{p}^* \frac{\partial m}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{f}} < 0 \quad (\text{E1})$$

La desigualdad se sigue de  $\frac{\partial m}{\partial \mathbf{p}} < 0$ .

De manera similar, derivando implícitamente la ecuación (28) respecto de  $k_N$  se tiene:

$$\mathbf{p}^* \left( \frac{\partial m}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial k_N} + \frac{\partial m}{\partial k_N} \right) \mathbf{f} = 0$$

de donde:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial k_N} = \frac{\frac{\partial m}{\partial k_N}}{\frac{\partial m}{\partial \mathbf{p}}} > 0 \quad (\text{E2})$$

La desigualdad se sigue de que  $\frac{\partial m}{\partial \mathbf{p}} < 0$  y  $\frac{\partial m}{\partial k_N} > 0$

En consecuencia, (36) puede escribirse:

$$\frac{d\mathbf{l}}{dk_N} \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^*} = - \frac{\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial k_N}}{\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{l}}} > 0$$

Esto es, la curva de demarcación  $\dot{\mathbf{l}} = 0$  tiene pendiente  $\frac{d\mathbf{l}}{dk_N} > 0$ . Sobre esta curva  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^*$ .

### F. Estabilidad del sistema dinámico (34) y (35)

La matriz jacobiana del sistema dinámico es:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{I}} & \frac{\partial \dot{\mathbf{i}}}{\partial k_N} \\ \frac{\partial k_N}{\partial \mathbf{I}} & \frac{\partial k_N}{\partial k_N} \end{vmatrix}_{(k_N^*, \mathbf{I}^*)}$$

en donde :

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{I}} \Big|_{(k_N^*, \mathbf{I}^*)} = s f'(k_M^*) \mathbf{p}^* - g + s f'(k_M^*) \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{I}} \Big|_{(k_N^*, \mathbf{I}^*)} \quad \mathbf{I}^* = \mathbf{I}^* s f'(k_M^*) \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{I}} \Big|_{(k_N^*, \mathbf{I}^*)} < 0$$

según (E13).

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{i}}}{\partial k_N} \Big|_{(k_N^*, \mathbf{I}^*)} = \mathbf{I}^* s f'(k_M^*) \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial k_N} \Big|_{(k_N^*, \mathbf{I}^*)}$$

$$\frac{\partial \dot{k}_N}{\partial \mathbf{I}} \Big|_{(k_N^*, \mathbf{I}^*)} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{k}_N}{\partial k_N} = s q'(k_N^*) - n < 0, \text{ (Condición de estabilidad en el modelo de Solow).}$$

Por consiguiente la traza de J es:

$$\therefore \text{tr } J = \frac{\partial \dot{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{I}} \Big|_{(k_N^*, \mathbf{I}^*)} + \frac{\partial \dot{k}_N}{\partial k_N} \Big|_{(k_N^*, \mathbf{I}^*)} = \mathbf{I}^* s f'(k_M^*) \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{I}} \Big|_{(k_N^*, \mathbf{I}^*)} + s q'(k_N^*) - n < 0$$

y el determinante de J es:

$$\det J = \frac{\partial \dot{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{l}} \Big|_{(k_N^*, \mathbf{l}^*)} \frac{\partial \dot{k}_N}{\partial k_N} \Big|_{(k_N^*, \mathbf{l}^*)} - \frac{\partial \dot{\mathbf{i}}}{\partial k_N} \Big|_{(k_N^*, \mathbf{l}^*)} \frac{\partial \dot{k}_N}{\partial \mathbf{l}} \Big|_{(k_N^*, \mathbf{l}^*)} =$$

$$= \mathbf{l}^* \mathbf{s} f'(k_M^*) \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{l}} \Big|_{(k_N^*, \mathbf{l}^*)} [sq'(k_N^*) - n] > 0.$$

El determinante de la ecuación característica es:

$$D = (\text{tr } J)^2 - 4(\det J) =$$

$$= \mathbf{l}^{*2} \mathbf{s}^2 f'^2(k_M^*) \left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{l}} \right)^2 + 2\mathbf{l}^* \mathbf{s} f'(k_M^*) \left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{l}} \right) [sq'(k_N^*) - n] +$$

$$+ [sq'(k_N^*) - n]^2 - 4\mathbf{l}^* \mathbf{s} f'(k_M^*) \left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{l}} \right) [sq'(k_N^*) - n] =$$

$$= \mathbf{l}^* \mathbf{s} f'(k_M^*) \left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{l}} \right) \Big|_{(k_N^*, \mathbf{l}^*)} - [sq'(k_N^*) - n]^2 \geq 0 \quad (\text{F1})$$

Además de sus expresiones resulta:

$$\text{Tr } J < 0 \quad (\text{F2})$$

$$\text{Det } J > 0 \quad (\text{F3})$$

De (F1), (F2), y (F3) se concluye que las dos raíces de la ecuación característica son rectas negativas, con lo que el punto de equilibrio es un nodo estable.\*

---

\* Véase, por ejemplo, Chiang A, "Métodos Fundamentales de Economía Matemática" Sección 18.6.

### G. Efecto de un cambio en $s$ sobre $I$ .

Recordando que  $L_e = \{[(k_{NN}^* - k_N^*)L_N]/k_M^*\}$ , la ecuación (42) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} & \mathbf{p}^* [q(k_N^*) - nk_N^* - c^*] L_N - \mathbf{p}^* n(k_{NN}^* - k_n^*) L_N - \mathbf{m}_L(\mathbf{p}^*, \bar{w}) L \\ & = [\mathbf{p}^* n k_M^* + \mathbf{m}_K(\mathbf{p}^*, k_M^*)] L_M. \end{aligned}$$

De donde

$$L_M = \frac{\mathbf{p}^* [q(k_N^*) - nk_N^* - c^*] L_N - \mathbf{p}^* n(k_{NN}^* - k_n^*) L_N - \mathbf{m}_L(\mathbf{p}^*, \bar{w}) L}{\mathbf{p}^* n k_M^* + \mathbf{m}_K(\mathbf{p}^*, k_M^*)}$$

El empleo total en el sector moderno del Sur es la suma del empleo en el sector capitalista controlado por los capitalistas locales, y el empleo en el enclave.

$$L_M + L_e = \frac{\mathbf{p}^* [q(k_N^*) - nk_N^* - c^*] L_N - \mathbf{p}^* n(k_{NN}^* - k_n^*) L_N - \mathbf{m}_L(\mathbf{p}^*, \bar{w}) L}{\mathbf{p}^* n k_M^* + \mathbf{m}_K(\mathbf{p}^*, k_M^*)} + \frac{(k_{NN}^* - k_n^*) L_N}{k_M^*}$$

o bien

$$L_M + L_e = \frac{\{\mathbf{p}^* [q(k_N^*) - nk_N^* - c^*] k_M^* + (k_{NN}^* - k_n^*) \mathbf{m}_K(\mathbf{p}^*, k_M^*)\} L_N - \mathbf{m}_L(\mathbf{p}^*, \bar{w}) L k_M^*}{[\mathbf{p}^* n k_M^* + \mathbf{m}_K(\mathbf{p}^*, k_M^*)] k_M^*}$$

La participación del empleo del sector moderno dentro del empleo total  $\lambda = \frac{L_M + L_e}{L}$  es por lo tanto:

$$I = \frac{\{\mathbf{p}^* [q(k_N^*) - nk_N^* - c^*] k_M^* + (k_{NN}^* - k_n^*) \mathbf{m}_K(\mathbf{p}^*, k_M^*)\} \mathbf{f} - \mathbf{m}_L(\mathbf{p}^*, \bar{w}) k_M^*}{[\mathbf{p}^* n k_M^* + \mathbf{m}_K(\mathbf{p}^*, k_M^*)] k_M^*}$$

El efecto de un cambio en  $s$  sobre  $I$  es:

$$\frac{dI}{ds} = -\frac{dc^*}{ds} \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{b}} + \frac{dk_{NN}^*}{ds} \frac{\mathbf{m}_K(\mathbf{p}^*, k_M^*) \mathbf{f}}{\mathbf{b} k_M^*}, \text{ donde } \mathbf{b} = [\mathbf{p}^* n k_M^* + \mathbf{m}_K(\mathbf{p}^*, k_M^*)]$$

$$\frac{dI}{ds} = \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{b}} \left( -\frac{dc^*}{ds} + \frac{dk_{NN}^*}{ds} \frac{\mathbf{m}_K(\mathbf{p}^*, k_M^*)}{k_M^*} \right)$$

Un incremento en la frugalidad del Norte reducirá la participación del sector moderno en la

economía,  $\frac{dI}{ds} < 0$ , si  $\frac{dc^*}{ds} > \frac{dk_{NN}^*}{ds} \frac{\mathbf{m}_K(\mathbf{p}^*, k_M^*)}{k_M^*}$ .

En general la relación capital trabajo en el sector moderno  $k_M^*$  es un múltiplo del consumo de los capitalistas por trabajador en el sector moderno. El valor de  $\frac{\mathbf{m}_K}{k_M^*}$  es muy pequeño

por lo que es casi seguro que un incremento en la inversión del Norte reduzca la participación del sector moderno en la economía.