



CEEE

Centro de Estudios Económicos

[www.colmex.mx](http://www.colmex.mx)

El Colegio de México, A.C.

*Serie documentos de trabajo*

**MODELO DE DOS FACTORES CON DINÁMICA DCC  
EN LA EVALUACIÓN DEL RIESGO DE CRÉDITO**

Carlos A. Reyes  
El Colegio de México

DOCUMENTO DE TRABAJO  
Núm. VI - 2012

# MODELO DE DOS FACTORES CON DINÁMICA DCC EN LA EVALUACIÓN DEL RIESGO DE CRÉDITO

Carlos A. Reyes\*

Primera versión: Julio 2011

## Resumen

Se presenta un modelo de dos factores para estimar el riesgo de crédito de un portafolio de acciones. La especificación de los rendimientos incluye un factor local (IPC) y un factor global (S&P500) cuya estructura de correlaciones sigue un proceso DCC (*Dynamic Conditional Correlations*). Las varianzas condicionales tienen una parametrización TARCH. Se considera el período 1994-2009 para analizar la distribución de los rendimientos agregados de un portafolio de acciones de la Bolsa Mexicana de Valores durante las crisis de 1994/1995 y 2007/2009. Las funciones de distribución obtenidas muestran un comportamiento empírico que describe adecuadamente los períodos económicos analizados. Los resultados son consistentes con los hechos estilizados de una mayor dependencia en la cola izquierda de la distribución de rendimientos y de exceso de curtosis en períodos de estrés económico. El modelo de dos factores describe una cola más ancha que el modelo de un factor durante la crisis de 1994/1995. La metodología propuesta es innovadora en el análisis de series de tiempo financieras mexicanas y es aplicable para el análisis de portafolios en mercados integrados a un mercado más grande, ya sea global o regional.

## I. Introducción

Las recientes turbulencias en los mercados financieros han resaltado la necesidad de revisar los modelos tradicionales de medición del riesgo financiero. En el presente trabajo se plantea una metodología para evaluar de

---

\* Centro de Estudios Económicos, El Colegio de México.

Este trabajo corresponde al primer capítulo de mi trabajo de tesis para el Doctorado en Economía en El Colegio de México.

Agradezco los valiosos comentarios de Gonzalo Rangel y José Miguel Torres, así como los comentarios de los participantes en los seminarios académicos del CEE. Los posibles errores son responsabilidad mía.

forma condicional el riesgo de crédito de un portafolio de activos usando información de mercado. Se parte de una representación de factores para los rendimientos de los activos, que tiene en cuenta que para ciertos mercados de valores es relevante la información del mercado local y la información proveniente de choques globales o regionales. En el caso de México esta intuición económica es capturada por el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores y por el índice (global) Standard & Poor's (S&P 500), representativo de los mercados accionarios estadounidenses. La matriz de varianzas y covarianzas del portafolio se modela de forma condicional combinando la especificación DCC de Engle (2002) para las correlaciones y especificaciones GARCH para las volatilidades. Esta forma de estimar la matriz de varianzas y covarianzas y la representación de factores permiten reducir de forma significativa el número de parámetros a estimar respecto a otros modelos que emplean procesos GARCH multivariados.

Siguiendo la metodología de Berd, Engle y Vornov (2007) se aprovecha la especificación de factores para obtener una expresión analítica de la función de distribución de los rendimientos agregados del portafolio.

Se estima el modelo para un portafolio de 10 acciones de empresas mexicanas grandes. Se trabaja bajo el supuesto de portafolio de pesos iguales (*equally weighted*), sin embargo se permite heterogeneidad en el peso de los factores y en las volatilidades idiosincráticas. La muestra va de 1994 a 2009 para poder analizar el desempeño del modelo durante la crisis de 1994/1995, de origen mexicano, y durante la crisis de 2007/2009, de origen externo (estadounidense). Las funciones de distribución que se obtienen describen de forma adecuada el comportamiento de los rendimientos agregados para el período correspondiente. Se estima también un modelo de un factor (IPC) para

efectos comparativos. El modelo de dos factores logra capturar colas más anchas, para los períodos de crisis antes mencionados, que el modelo de un factor y que la función de distribución empírica histórica.

En la siguiente sección se describe de manera breve el contexto teórico y metodológico en el que se ubica el presente trabajo y que permite apreciar más claramente las ventajas y desventajas del modelo propuesto: por un lado se tiene la literatura concerniente al riesgo de crédito de un portafolio y por el otro la que tiene que ver con la modelación de la matriz de varianzas y covarianzas. Lo deseable es contar con un modelo que incorpore la información disponible de forma condicional a las interacciones entre los activos que conforman el portafolio y que son determinantes del riesgo de crédito. Claramente esto no aplica para todo tipo de riesgo de crédito, pero sí para aquellos casos donde se cuenta con los precios de mercado de los instrumentos del portafolio.

En la tercera sección se presenta el modelo econométrico propuesto; se detallan las componentes y supuestos del mismo, haciendo especial énfasis en la representación bifactorial, en el modelo DCC y en el desarrollo analítico de la función de distribución. En la cuarta sección se estima el modelo y se presentan los resultados. Finalmente se concluye y se sugieren posibles extensiones al modelo.

## **II. Riesgo de Crédito y Correlaciones**

La evaluación del riesgo de crédito puede ser de forma individual o de forma conjunta. Este último caso es el que nos ocupa: el riesgo de crédito de un portafolio.

Teniendo en cuenta que el hablar de modelos más empleados debe estar libre de afirmaciones categóricas (ya que las instituciones financieras consideran estos modelos como parte de su capital intelectual y por lo tanto resulta complicado conocer a cabalidad los modelos que emplean en su práctica cotidiana) tomemos como referente tres modelos representativos de la medición del riesgo de crédito: CreditMetrics<sup>TM</sup>, desarrollado por J.P. Morgan (1997); CreditRisk+ (1997), desarrollado por Credit Suisse/First Boston; y CyRCE<sup>1</sup> de Márquez (2002). Los dos primeros alcanzan la categoría de paradigma y el último sin ser representativo, es un modelo desarrollado en México bajo el auspicio de la autoridad reguladora (Banco de México) y que da un tratamiento completo al tema de riesgo de crédito cuyas características merece la pena comentar.

CreditMetrics<sup>TM</sup> es un modelo que emplea como insumos precios de mercado y calificaciones de crédito. Modela la transición a distintos estados de calidad crediticia, incluido el estado de incumplimiento. Se requiere contar con probabilidades de transición proporcionadas generalmente por una calificadora o generadas de modo interno, lo cual es un supuesto no trivial. El modelo logra capturar curtosis en la cola de la distribución no-condicional de los rendimientos, también se pueden modelar correlaciones no-condicionales mediante el uso de factores.

CreditRisk+ se origina en el contexto de la teoría del riesgo, como respuesta a los problemas de administración actuarial de los portafolios de activos contingentes de las aseguradoras. Por esta razón, al extender el modelo para evaluar el riesgo de crédito, se incorporan características útiles como son la concentración y el tamaño de los riesgos. A diferencia de CreditMetrics<sup>TM</sup>, en CreditRisk+ únicamente se contemplan dos estados de la naturaleza: el estado

---

<sup>1</sup> El nombre proviene de Concentración y Riesgo de Crédito.

de pago y el estado de no-pago. La probabilidad de incumplimiento es una variable Poisson cuyo parámetro característico (tasa de incumplimientos) a su vez sigue un proceso gamma. El portafolio se segmenta en sectores independientes de acuerdo al peso que tienen determinados factores sistemáticos e idiosincráticos sobre el instrumento. Esta segmentación en sectores independientes permite pasar de las distribuciones marginales a las conjuntas sin mayor dificultad. El modelo logra describir efectos de concentración y volatilidad en las probabilidades de incumplimiento. Finalmente, es posible capturar la acumulación de probabilidad en la cola izquierda de la distribución. La modelación es condicional a los factores pero no al conjunto de información que se actualiza en el tiempo. Una desventaja clara de CreditRisk+ es que no se toman en cuenta estados intermedios de calidad crediticia.

CreditMetrics<sup>TM</sup> sirve para instrumentos con precios de mercado, lo que excluye hipotecas, créditos al consumo y algunos activos exóticos. CreditRisk+ puede usarse para bonos, derivados y préstamos. Para una comparación más extensa de estos modelos se puede consultar Gordy (2000).

El modelo CyRCE de Márquez (2002) presenta algunas características importantes: bajo cierto supuestos, se puede llegar a una expresión cerrada del VaR; se puede dividir el portafolio en segmentos no homogéneos y analizar correlaciones dentro-de (*within*) y entre (*between*) ellos; se mide explícitamente la contribución individual al riesgo y la contribución por concentración, medida por el índice Herfindahl-Hirschman.

El modelo propuesto en la siguiente sección no requiere calificaciones de crédito y recurre a supuestos distribucionales menos restrictivos para obtener la función de distribución de los rendimientos y para simular el

comportamiento de los activos en el portafolio y sus interacciones en el tiempo.

Una desventaja importante de los modelos que emplean calificaciones de crédito es que dichas calificaciones no incorporan en tiempo real la información sobre el instrumento y con frecuencia éstas se determinan tomando como base la experiencia de otros países. Además, aunque cada día se emiten calificaciones más ad-hoc, la credibilidad de las mismas se ha deteriorado al no haber anticipado adecuadamente los eventos que llevaron a la crisis de 2007/2009.

Una vez que se ha optado por incorporar información de forma más oportuna al modelo, se presenta el problema de estimar la matriz de varianzas y covarianzas condicional,  $H_t$ :

$$r_t = H_t^{1/2} \xi_t$$

$$H_t = \text{Var}(r_t | F_{t-1})$$

$\xi_t$  es Ruido Blanco Estricto (0,1)

Donde  $\{r_t\}$  es un vector de rendimientos de dimensión  $n \times 1$  con media cero y  $F_t$  es el conjunto de información generado por el proceso observable  $\{r_t\}$ .

Para la modelación de esta matriz por lo general se recurre a los modelos GARCH multivariados<sup>2</sup>, que son una generalización del modelo GARCH univariado de Engle (1982) y Bollerslev (1986). Un problema común a estos modelos es la disyuntiva entre flexibilidad y parsimonia de los modelos: por lo general los modelos más flexibles requieren estimar un alto número de

---

<sup>2</sup> Para una revisión de literatura más completa sobre modelos multivariados de volatilidad se puede consultar los trabajos de Bawens, Laurent y Rombouts (2006); Rue S. Tsay (2007); y Silvennoinen y Teräsvirta (2008).

parámetros. Engle (2002) propone el modelo DCC que reduce la dimensión del problema. Este modelo descompone el problema multivariado en estimaciones univariadas de la volatilidad y las correlaciones, las cuales siguen procesos condicionales autorregresivos. Esta especificación es la que se elige para modelar la matriz de varianzas y covarianzas de los factores que se presenta en la siguiente sección.

### **III. Modelo de dos Factores DCC**

Al situarnos en el contexto de una economía globalizada, es natural pensar en una alta correlación entre eventos económicos tanto a nivel local como a nivel global. Este efecto se acentúa en épocas de inestabilidad económica, como quedó claro en la crisis 2007/2009, cuando eventos originados en los mercados internacionales de crédito (principalmente en E.U.A.) tuvieron repercusiones en un gran número de países en distintas dimensiones: producción, consumo, mercados laborales, comercio, el crédito mismo, etc.

Aún sin la presencia de eventos sistémicos, la interacción de los agentes, el valor de las empresas y el valor de los activos van a cambiar en el tiempo. Una medición adecuada del riesgo de crédito debe tomar en cuenta estos cambios. Sin embargo, es importante identificar los factores relevantes que determinan los cambios en el valor de un portafolio.

La especificación de los rendimientos mediante factores tiene su antecedente en los modelos CAPM de Sharpe (1964) y Lintner (1965), y APT de Ross (1965), los cuales dan al factor de descuento estocástico una representación lineal.



Berd, Engle y Vornov (2007) proponen una especificación simétrica de un factor para los rendimientos a fin de evaluar el riesgo de crédito de los *tranches* de las *Collateralized Debt Obligations*<sup>3</sup>:

$$r_{i,t} = \beta r_{m,t} + \sigma \varepsilon_{i,t}$$

Los rendimientos se descomponen en una parte sistemática y una parte idiosincrática, donde el peso del factor de mercado y la volatilidad idiosincrática son constantes e idénticos para todos los activos.

En el modelo propuesto en este trabajo se extiende la especificación de los rendimientos anterior al incluir dos factores en la parte sistemática y permitir heterogeneidad en el peso de dichos factores y en las volatilidades idiosincráticas:<sup>4</sup>

$$r_{i,t} = \beta_i^{M1} r_{M1,t} + \beta_i^{M2} r_{M2,t} + \sigma_i \xi_{i,t}$$

donde M1 es el IPC (factor local) y M2 es el S&P 500 (factor global).

La intuición económica que se trata de capturar con esta especificación es que para mercados de valores como el mexicano que se encuentran fuertemente ligados a un mercado más profundo y desarrollado, tanto los choques de este último como los choques locales van ser relevantes en la determinación de los rendimientos de los activos.

---

<sup>3</sup> Las *Collateralized Debt Obligations* (CDO) son portafolios de deuda estructurada muy generales que se dividen en sub-portafolios (*tranches* o tramos) con distintos perfiles de riesgo y distintas prioridades de pago. Los flujos generados por los activos comprendidos en el CDO se dirigen primero a los *tranches* de mayor *seniority*. Por lo tanto los tramos más *junior* deben ofrecer una mayor compensación por riesgo. No existe una metodología generalmente aceptada para valuar este tipo de instrumentos que, de acuerdo a sus particularidades, pueden llegar a ser sumamente complejos.

<sup>4</sup> Una especificación aún más flexible sería permitir que las betas del modelo y la volatilidad cambien en el tiempo empleando modelos del tipo *Factor-DCC* de Engle (2009); el *Factor-Spline-GARCH* de Engle y Rangel (2009); o el modelo Multiplicativo Multivariado de Hafner y Linton (2010).

Una ventaja adicional de la representación de factores es reducir el problema de la dimensionalidad de la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas mencionado anteriormente. Esto se logra al tener una estructura de correlaciones para los factores que se hereda a las correlaciones entre activos. Esta estructura va a estar dada por el proceso de Correlaciones Condicionales Dinámicas (DCC) de Engle (2002).

El modelo DCC parte de un resultado estadístico muy básico: la matriz de varianzas y covarianzas puede expresarse como el producto de la matriz diagonal de desviaciones estándar y la matriz de correlaciones. En términos condicionales:

$$H_t = D_t R_t D_t$$

Donde:

$$H_t = \text{Var}(\tilde{r}_t | F_{t-1}) = E(\tilde{r}_t \tilde{r}_t' | F_{t-1}) = E_{t-1}(\tilde{r}_t \tilde{r}_t')$$

$\tilde{r}_t = D_t \varepsilon_t$  y  $\varepsilon_t$  son vectores con media cero y dimensión  $n \times 1$

$F_t$  es el conjunto de información generado por el proceso observable  $r_t$

$R_t$  es la matriz de correlaciones condicionales del vector  $r_t$

$D_t = \text{diag}(h_{1t}^{1/2}, \dots, h_{nt}^{1/2})$  es la matriz de desviaciones estándar condicionales del vector  $r_t$

$h_{it}$  es la varianza condicional univariada del elemento  $i$  del vector  $r_t$

En este trabajo  $\tilde{r}_t = (r_{M1,t} \quad r_{M2,t})'$ , es decir, el vector de factores va a tener una estructura de correlaciones DCC y por lo tanto la matriz  $R_t$  va a ser de dimensión  $2 \times 2$ .

Es fácil mostrar que la matriz de correlaciones de los rendimientos es la matriz de varianzas y covarianzas de los residuales estandarizados. Asumiendo normalidad tenemos que:

$$\varepsilon_t \sim N(0, R_t)$$

La matriz  $R_t$  se estima a partir la normalización de la matriz de cuasi-correlaciones  $Q_t$  la cual por lo regular (aunque no necesariamente) se estima de forma autorregresiva.

$$Q_t = (1 - a - b)\bar{R} + a\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1} + bQ_{t-1}$$

donde  $\bar{R}$  es la matriz de correlaciones muestral.

$Q_t$  recibe el nombre de matriz de cuasi-correlaciones pues para asegurarnos de que la matriz de correlaciones,  $R_t$ , tenga elementos en el rango (-1,1) es necesario realizar la siguiente normalización:<sup>5</sup>

$$R_t = (I \odot Q_t)^{-1/2} Q_t (I \odot Q_t)^{-1/2}$$

Donde  $\odot$  es el producto Haddamard (componente a componente).

Podemos ver que la información necesaria para estimar las correlaciones condicionales está contenida en los residuales obtenidos en una primera etapa en la cual se estiman las varianzas condicionales y se estandarizan los residuales.

---

<sup>5</sup> Engle y Sheppard (2001) desarrollan de forma extensa las propiedades teóricas de estacionariedad y regularidad de los modelos DCC.

La especificación de dos factores con correlaciones DCC y varianzas *Threshold* GARCH(1,1) es la siguiente:

$$\begin{aligned}
r_{i,t} &= \beta_i^{M1} r_{M1,t} + \beta_i^{M2} r_{M2,t} + \sigma_i \varepsilon_{i,t} \\
r_{M1,t} &= \sigma_{M1,t} \varepsilon_{M1,t} \\
\sigma_{M1,t}^2 &= \omega + \alpha_{M1} r_{M1,t-1}^2 + \gamma_{M1} r_{M1,t-1}^2 I_{(r_{M1,t-1} < 0)} + \beta_{M1} \sigma_{M1,t-1}^2 \\
r_{M2,t} &= \sigma_{M2,t} \varepsilon_{M2,t} \\
\sigma_{M2,t}^2 &= \omega + \alpha_{M2} r_{M2,t-1}^2 + \gamma_{M2} r_{M2,t-1}^2 I_{(r_{M2,t-1} < 0)} + \beta_{M2} \sigma_{M2,t-1}^2 \\
\begin{pmatrix} \varepsilon_{M1,t} \\ \varepsilon_{M2,t} \end{pmatrix} &\sim N(0, R_t) \\
R_t &= (I \odot Q_t)^{-1/2} Q_t (I \odot Q_t)^{-1/2} \\
q_{ij,t} &= \bar{\rho}_{ij} + a(\varepsilon_{i,t-1} \varepsilon_{j,t-1} - \bar{\rho}_{ij}) + b(q_{ij,t-1} - \bar{\rho}_{ij}) \\
i, j &= M1, M2
\end{aligned}$$

Nótese que las varianzas de los factores tienen una especificación TARCH con el fin de capturar el efecto-apalancamiento debido a los rendimientos negativos, o en otras palabras, se le asigna mayor peso a las malas noticias.

Se puede demostrar que con la especificación anterior la función de distribución condicional de los rendimientos de mercado va a ser normal bivariada.

$$\begin{pmatrix} r_{M1,t} \\ r_{M2,t} \end{pmatrix} \sim N(\bar{0}, H_t) = N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{M1,t}^2 & \sigma_{M1,t} \sigma_{M2,t} \rho_{M1,M2,t} \\ \sigma_{M1,t} \sigma_{M2,t} \rho_{M1,M2,t} & \sigma_{M2,t}^2 \end{pmatrix}\right)$$

La correlación entre activos va a depender de las correlaciones entre los factores, de los pesos de los factores y de las correlaciones muestrales de las idiosincrasias:

$$\rho_{i,j,t} = \frac{\beta_i^{M1} \beta_j^{M1} H_{11,t} + (\beta_i^{M1} \beta_j^{M2} + \beta_i^{M2} \beta_j^{M1}) H_{12,t} + \beta_i^{M2} \beta_j^{M2} H_{22,t} + Cov(\sigma_i \varepsilon_i, \sigma_j \varepsilon_j)}{\sqrt{(\beta_i^{M1})^2 H_{11,t} + (\beta_i^{M2})^2 H_{22,t} + 2\beta_i^{M1} \beta_i^{M2} H_{12,t} + Var(\sigma_i \varepsilon_i)} \sqrt{(\beta_j^{M1})^2 H_{11,t} + (\beta_j^{M2})^2 H_{22,t} + 2\beta_j^{M1} \beta_j^{M2} H_{12,t} + Var(\sigma_j \varepsilon_j)}}$$

$i, j = 1, \dots, n$

La estructura recursiva de las distintas componentes del modelo nos permite simular el comportamiento futuro de los rendimientos. Esta característica es importante para poder analizar el riesgo de largo plazo de un portafolio de activos.

Durante la crisis de 2007/2009 los modelos tradicionales funcionaron razonablemente bien para administrar el riesgo de corto plazo. Sin embargo existían numerosas posiciones de largo plazo cuyo riesgo no era claro cómo cuantificar. Para analizar el riesgo de horizontes de tiempo más largos se simula el portafolio de pesos iguales para T días en el futuro a partir de la fecha inicial t. Una vez hecho esto se agregan los rendimientos.

$$r_{p,t \rightarrow T} = w_1 r_{1,t \rightarrow T} + w_2 r_{2,t \rightarrow T} + \dots + w_n r_{n,t \rightarrow T}$$

$$w_1 = w_2 = \dots = w_n = w = \frac{1}{n}$$

$$r_{i,t \rightarrow T} = \sum_{s=1}^T r_{i,t+s}$$

Esta forma de agregar rendimientos presupone una especificación logarítmica de los rendimientos.

Estamos interesados en estudiar la probabilidad del evento de incumplimiento (*default*), el cual podemos definir como la variable binaria  $D_p$  (que toma el valor uno si el default ocurre y cero en otro caso) y hacer un mapeo a un *threshold model* de tal manera que el evento de default ocurre cuando se traspasa cierto umbral de pérdidas d.

$$D_p = 1 \Leftrightarrow r_{p,t+T} \leq d$$

Haciendo uso de la ley de las expectativas iteradas y de las propiedades de las funciones indicadoras de eventos aleatorios, podemos derivar una expresión conveniente para el evento de default mediante la función de distribución de pérdidas del portafolio de rendimientos agregados:

$$\begin{aligned}
P(D_p = 1) &= P(r_{p,t \rightarrow T} \leq d) = E\left(I_{(r_{p,t \rightarrow T} \leq d)}\right) = E\left(E\left(I_{(r_{p,t \rightarrow T} \leq d)} \middle| r_{m1,t \rightarrow T}, r_{m2,t \rightarrow T}\right)\right) \\
&= E\left(P\left(r_{p,t \rightarrow T} \leq d \middle| r_{m1,t \rightarrow T}, r_{m2,t \rightarrow T}\right)\right) \\
&= E\left(P\left(\sum_{i=1}^n w\sigma_i \varepsilon_{i,t \rightarrow T} \leq d - \beta_{m1} r_{m1,t \rightarrow T} - \beta_{m2} r_{m2,t \rightarrow T}\right)\right) = \\
&= E\left(\Phi\left(\frac{d - \beta_{m1} r_{m1,t \rightarrow T} - \beta_{m2} r_{m2,t \rightarrow T}}{\frac{\sqrt{T}}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}}\right)\right)
\end{aligned}$$

donde  $\beta_{m1}$  y  $\beta_{m2}$  son los promedios ponderados del peso de los factores para los rendimientos individuales desagregados.

La función de pérdidas del portafolio es el producto final del modelo que nos permite analizar comportamientos extremos del rendimiento del portafolio así como comportamientos más moderados de los mismos.

Aún cuando se parte de un supuesto de normalidad de corto plazo, la dinámica condicional que imponen los modelos DCC y TARCh induce concentración de probabilidad en la cola izquierda de la distribución del riesgo de largo plazo.

#### IV. Estimación del Modelo y Resultados

Para analizar las propiedades empíricas del modelo de dos factores se forma un portafolio de pesos iguales con 10 acciones de la Bolsa Mexicana de

Valores. Los factores de mercado están representados por los índices accionarios IPC y S&P 500, debido al alto grado de integración económica de México con E.U.A. En el cuadro 1 se presentan algunas estadísticas descriptivas de los excesos de rendimientos de los factores en pesos, los rendimientos del S&P 500 en dólares y los rendimientos del tipo de cambio dólar/peso.

VARIABLE	IPC	SP500	SP500USD	TC
<b>Media</b>	0.000148	0.000096	0.000172	0.000027
<b>Mediana</b>	-0.000169	-0.000177	0.000273	0.000095
<b>Máximo</b>	0.120462	0.200805	0.109572	0.109542
<b>Mínimo</b>	-0.14365	-0.148062	-0.094695	-0.094725
<b>Desv. Est.</b>	0.016559	0.0147	0.012473	0.012472
<b>Sesgo</b>	0.069527	0.949113	-0.204157	-0.195434
<b>Curtosis</b>	9.033537	25.44926	12.05339	12.05789
<b>No. Obs.</b>	3,861	3,861	3,861	3,861

Cuadro 1. Estadísticas descriptivas de los factores y del tipo de cambio.

Cabe mencionar que, si bien los candidatos naturales para estudiar el riesgo de crédito son los instrumentos de deuda (bonos) de las empresas, por la poca profundidad de estos mercados en México los precios de estos instrumentos son poco informativos pues existe una gran cantidad de días en que no se registran movimientos. En cambio, los precios de las acciones son más dinámicos y es posible explotar sus variaciones para intentar conocer el comportamiento de largo plazo. Es decir, este tipo de análisis puede realizarse para activos líquidos con precios de mercado.

Se seleccionan 10 empresas que están entre las más grandes en México: Carso, Cemex, Comercial Mexicana, Elektra, Femsa, Vitro, Banorte, Telmex, Televisa y Wal-Mart de México. En el cuadro 2 se muestran algunas estadísticas descriptivas de los excesos de rendimientos logarítmicos de las acciones correspondientes.

VARIABLE	CARSO	CEMEX	COMER	ELEKTRA	FEMSA	GVITRO	NORTE	TELMEX	TLEVISA	WALMEX
Media	0.000133	-0.000252	-0.000448	0.000498	0.000274	-0.000713	0.000135	0.000206	-0.000030	0.000171
Mediana	-0.000249	-0.000486	-0.000466	-0.000389	-0.000381	-0.000533	-0.000532	-0.000466	-0.000406	-0.000408
Máximo	0.219229	0.237851	0.437918	0.212391	0.245186	0.266986	0.269996	0.125677	0.179506	0.17014
Mínimo	-0.192363	-0.241121	-1.402595	-0.210111	-0.352193	-0.260875	-0.24267	-0.100288	-0.191593	-0.160278
Desv. Est.	0.024981	0.026912	0.036763	0.027978	0.025822	0.02876	0.028665	0.019303	0.025471	0.022752
Sesgo	0.045222	-0.087882	-14.73852	0.114127	-0.310779	0.174366	0.112522	0.222633	0.268148	0.167316
Curtosis	9.717663	13.76615	574.2798	10.63012	22.46869	13.39032	11.7778	6.091517	8.757202	8.239137
No. Obs.	3,861	3,861	3,861	3,861	3,861	3,861	3,861	3,861	3,861	3,861

Cuadro 2. Estadísticas descriptivas de las acciones de la BMV que integran el portafolio.

Dos casos interesantes son los de Comercial Mexicana y Grupo Vitro, ya que han presentado eventos financieros especialmente complicados en su historia. En particular, en 2008, ambas empresas entraron en procesos de moratoria de pagos y de casi-bancarota.

Las series de precios diarios conforman un panel balanceado que va de julio de 1994 a abril de 2009, período en el que se desarrollan dos de las crisis financieras más importantes de los últimos 20 años: la crisis de 1994/1995, de origen local, y la de 2007/2009, de origen externo.

Los precios se transforman a exceso de log-rendimientos. Por consistencia y para evitar efectos de *carry trade* los rendimientos del S&P 500 se expresan en pesos. La tasa libre de riesgo que se considera es la tasa equivalente diaria de la tasa CETE a 91 días.

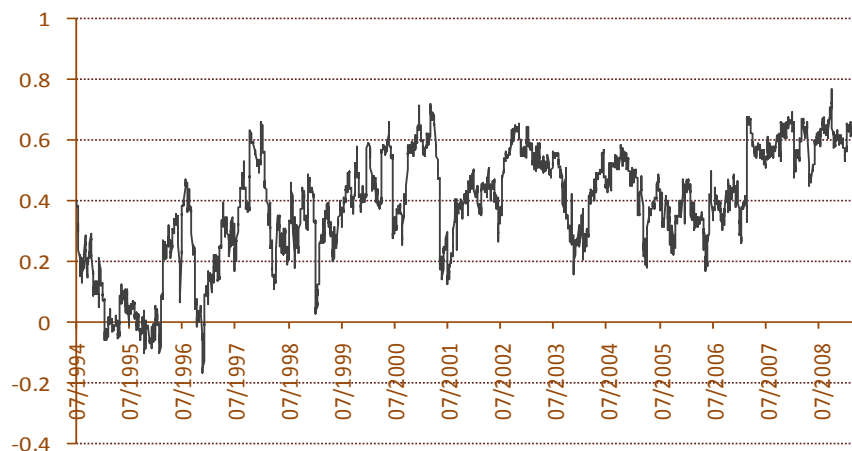


Gráfico 1. Correlaciones DCC entre el IPC y el S&P 500.



Al estimar las betas de las ecuaciones individuales de rendimientos nos encontramos con problemas de significancia para algunas acciones, probablemente debido a problemas de colinealidad en los factores en ciertos momentos en el tiempo. Como se puede observar en el gráfico 1, las correlaciones DCC entre el IPC y el S&P 500 son bastante altas a la final de la muestra, alcanzando niveles por encima del 60%.

Con el fin de contar con un factor más significativo que sea función del IPC se realiza una “ortogonalización” consistente en extraer la información contenida en el IPC que no es explicada por el S&P 500, para lo cual se realiza una regresión TARCH(1,1) de los rendimientos del IPC sobre los rendimientos del S&P 500:

$$r_{IPC,t} = Br_{SP500,t} + \varepsilon_{i,t} \rightarrow r_{\perp IPC,t} = \varepsilon_{i,t}$$

Los residuales de la regresión son la nueva variable IPC\_ORT y son heteroscedásticos<sup>6</sup>. Este cambio de variable modifica la ecuación TARCH de la volatilidad del primer factor puesto que, para conservar el sentido económico del efecto apalancamiento, el umbral de los efectos asimétricos no es sobre el IPC\_ORT sino sobre la serie original del IPC:

$$\sigma_{\perp IPC,t}^2 = \omega + \alpha_{\perp IPC} r_{\perp IPC,t-1}^2 + \gamma_{\perp IPC} r_{\perp IPC,t-1}^2 I_{(r_{IPC,t-1} < 0)} + \beta_{\perp IPC} \sigma_{\perp IPC,t-1}^2$$

Como era de esperarse, al tomar la nueva variable las correlaciones DCC se reducen (véase el gráfico 5) y las betas se vuelven altamente significativas como puede apreciarse en el cuadro 3, a excepción de la de Comercial Mexicana la cual es por mucho la relación más débil (aunque mantiene niveles de significancia razonables). También como era de esperarse las constantes son cercanas a cero y no significativas. El peso del factor IPC\_ORT , en

---

<sup>6</sup> En el Anexo se hace un análisis de componentes principales para el IPC y el S&P 500, antes y después de la ortogonalización aquí descrita.

promedio, es muy cercano a la unidad y el del factor S&P 500 es aproximadamente un medio.

VARIABLE	CARSO	CEMEX	COMER	ELEKTRA	FEMSA	GVITRO	NORTE	TELMEX	TELEVISA	WALMEX
C	0.000343 (1.334711)	-0.000031 (-0.101308)	-0.000231 (-0.441977)	0.00067 (1.576722)	0.000508 (2.063278)	-0.000557 (-1.354918)	0.000305 (0.805797)	0.000348 (1.788591)	0.000147 (0.590499)	0.000356 (1.565358)
IPC_ORI	1.113015 (36.660570)	1.199339 (30.498760)	1.020984 (9.053903)	0.924332 (18.49139)	1.185592 (20.96697)	0.803867 (17.58044)	0.949274 (16.35796)	0.856177 (28.485200)	1.058455 (32.451720)	1.00144 (34.540000)
SP500	0.480787 (15.971730)	0.574945 (11.35428)	0.181575 (1.953223)	0.426663 (9.372048)	0.398371 (7.259164)	0.300209 (6.013019)	0.495121 (14.346670)	0.580223 (20.275720)	0.689516 (22.023770)	0.474188 (13.416320)

Cuadro 3. Resultados de la regresión de mínimos cuadrados de los rendimientos individuales sobre los factores. Los errores son los de Newey-West. Se reportan los respectivos estadísticos t.

Hay que tener en cuenta que las betas constantes a lo largo de la muestra son una simplificación que hace el modelo. Para examinar el alcance de esta simplificación se estiman rolling betas con horizontes de 120 días.<sup>7</sup> En el gráfico 2 se presentan los promedios de las rolling betas individuales. Se observa que a pesar de que al tomar promedios la variación de las betas se suaviza, aún es posible observar cambios importantes en el peso de los factores. También podemos notar que la fluctuación de las betas se da alrededor de la media de largo plazo que sugieren los estimados en el cuadro 1. Aunque no existe variación en los rendimientos proveniente del peso de los factores no de las volatilidades idiosincráticas (por ser constantes en el tiempo), la variación proveniente de las volatilidades y de las correlaciones condicionales de los factores es importante y ésta se hereda a los rendimientos individuales.

<sup>7</sup> Como se mencionó anteriormente, para conocer la dinámica condicional de las betas variantes en el tiempo se necesitaría recurrir a una especificación donde las varianzas idiosincráticas se modelen de forma condicional como el Factor-Double-ARCH. Se obtienen aún mejores estimados con modelos que toman que pueden existir factores latentes omitidos en la especificación de los rendimientos, como el modelo Factor-DCC o el modelo Factor-Spline-GARCH para modelar correlaciones de alta y baja frecuencia de Engle y Rangel (2009). Para los otros dos modelos véase Engle (2009).

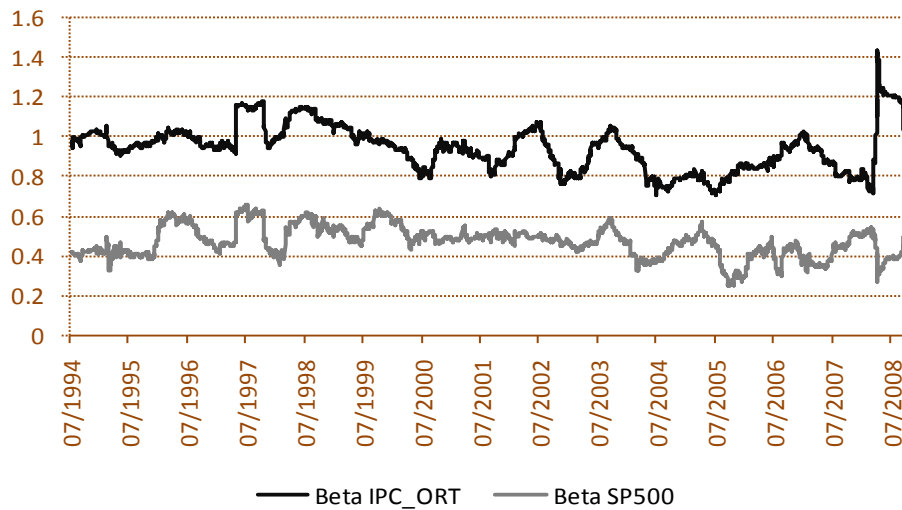


Gráfico 2. Rolling betas promedio de los activos del portafolio a de 120 días, estimadas con OLS y errores estandarizados Newey-West.

Los parámetros de las ecuaciones TARCH(1,1) se presentan en el cuadro 4 y los correspondientes estimados de las volatilidades en los gráficos 3 y 4.

<b>Factor</b>	<b>IPC_ORT</b>	<b>S&amp;P 500</b>
$\alpha$	0.034218 (5.374144)	0.061439 (19.9667)
$\gamma$	0.123534 (14.39635)	0.068766 (7.002842)
$\beta$	0.894268 (145.0798)	0.889825 (162.0715)

Cuadro 4. Estimados de la ecuación de volatilidad TARCH(1,1). La estimación se hace por máxima verosimilitud. La ecuación del IPC\_ORT se modifica para tomar en cuenta la asimetría respecto a la serie original IPC.

Los parámetros de persistencia son muy parecidos para los dos factores. Sin embargo, los parámetros de efectos de las innovaciones muestran un mayor

efecto de la asimetría de las noticias en el caso del IPC\_ORT. En ambos casos se cumple la condición de estacionariedad  $\alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma < 0$ .

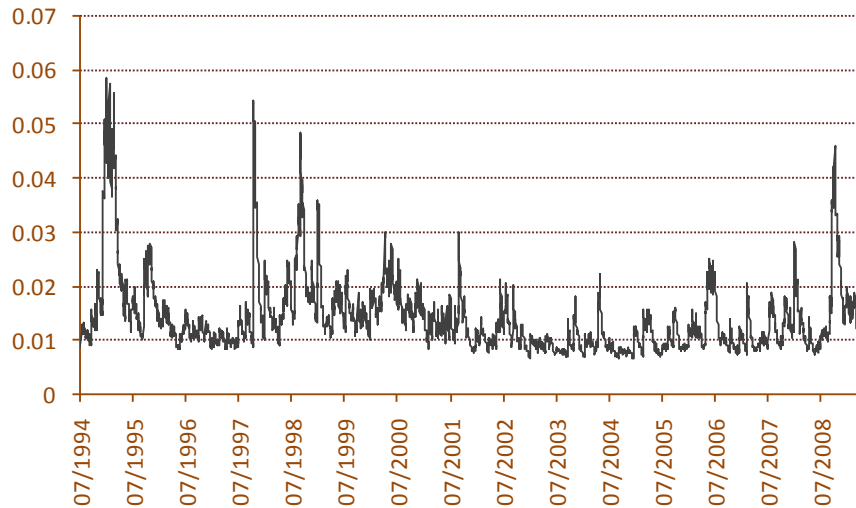


Gráfico 3. Volatilidad diaria TARCH del factor IPC\_ORT.

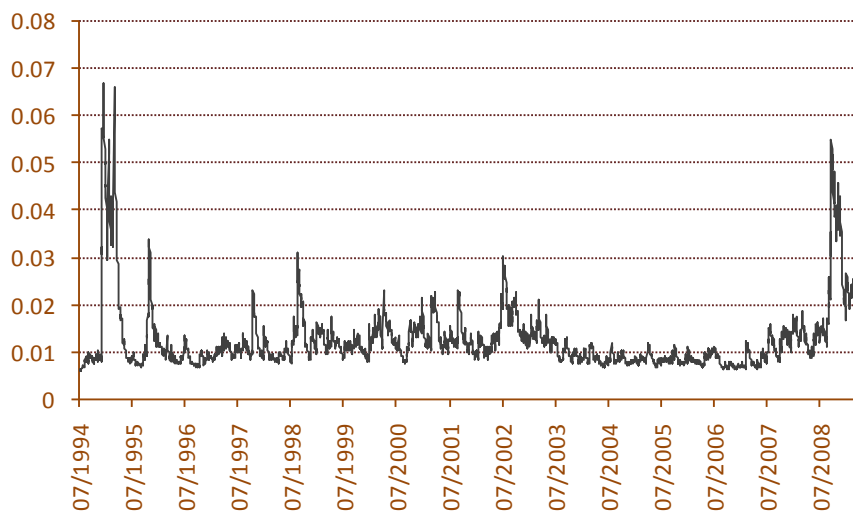


Gráfico 4. Volatilidad diaria TARCH del factor S&P 500.

En general la volatilidad del IPC\_ORT es superior a la del S&P 500 pero al final de la muestra este fenómeno se invierte. Hay coincidencia en algunos períodos de *clustering* como en 1994/1995 y en el período de 2007-2009 y un desfase importante en el período 1997/2002.

En una segunda etapa, se estiman por máxima verosimilitud las correlaciones DCC de los factores usando los residuales estandarizados de las ecuaciones TARARCH. Los parámetros de la estimación son significativos.

DCC	a	b
Valor	0.025729	0.963877
p-value	0.000000	0.000000

Cuadro 5. Parámetros DCC de los factores.

Los valores típicos para rendimientos financieros de los parámetros DCC son de  $a=0.01$  y  $b=0.97^8$ , de lo cual se infiere una velocidad de reversión a la media de largo plazo un poco menor a la de los valores típicos.

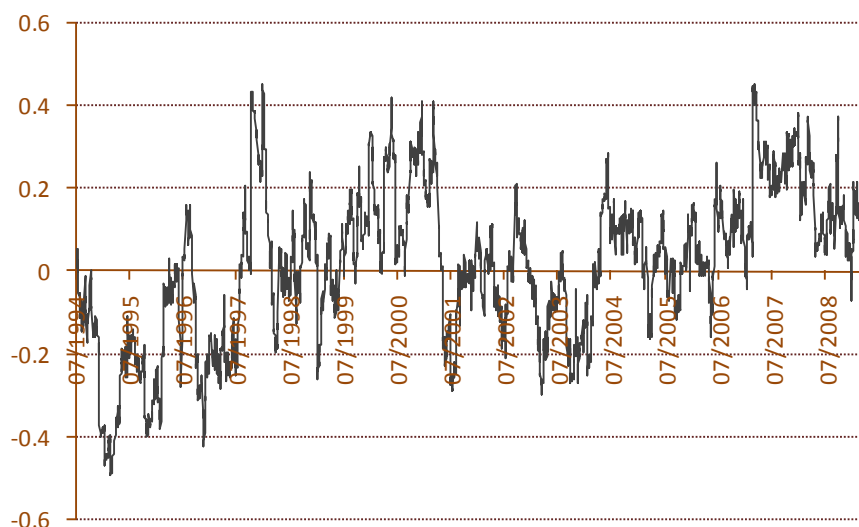


Gráfico 5. Correlaciones DCC del IPC\_ORT y del S&P 500

Las correlaciones del factor IPC transformado con el S&P 500 son más bajas que las del factor original como resultado de la ortogonalización y como puede observarse al comparar el gráfico 1 con el gráfico 5. La variación se da

<sup>8</sup> Véase Engle (2009).

alrededor de cero pero con fluctuaciones de una magnitud no despreciable que va del -40% al 40% aproximadamente.

Esta dinámica que hemos observado en las correlaciones y volatilidades condicionales se va a heredar a los rendimientos individuales al momento de hacer las simulaciones en el tiempo y por ende a los rendimientos del portafolio.

Como se mencionó anteriormente el portafolio que se conforma tiene pesos iguales y queremos conocer el comportamiento de largo plazo de sus rendimientos. Una primera aproximación al problema es construir la función de distribución de los rendimientos de largo plazo para toda la muestra. El horizonte de agregación es de 100 días. En el gráfico 6 puede verse el comportamiento de tales rendimientos agregados para los períodos de 1994/1995, 1998 y 2007/2009. Esto último nos da evidencia de colas anchas en la distribución de rendimientos. Para las simulaciones se toma en cuenta los períodos de 1994/1995 y de 2007/2009 por ser los que más directamente ligan el origen de las crisis a los factores de mercado de la especificación.

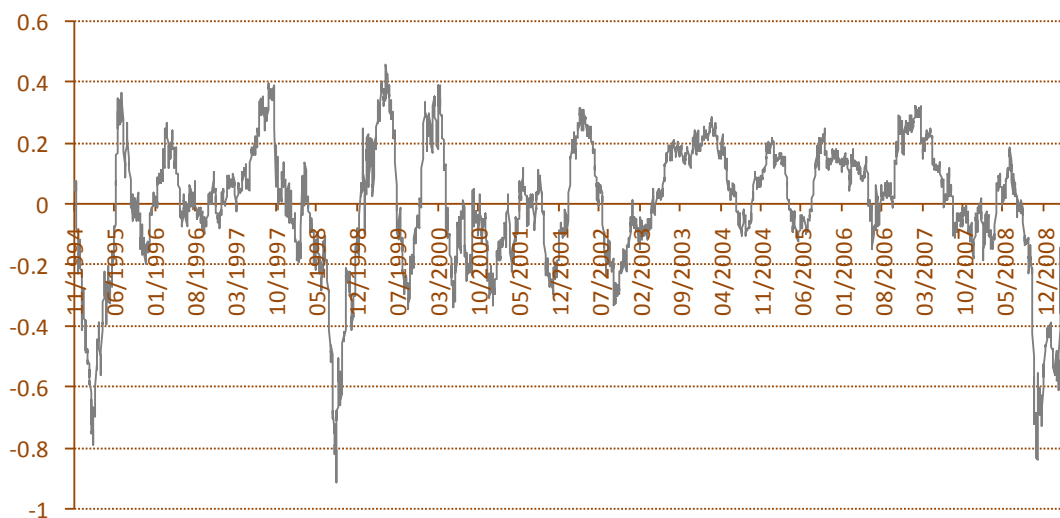


Gráfico 6. Rendimientos Históricos Agregados a 100 días del Portafolio de pesos iguales.

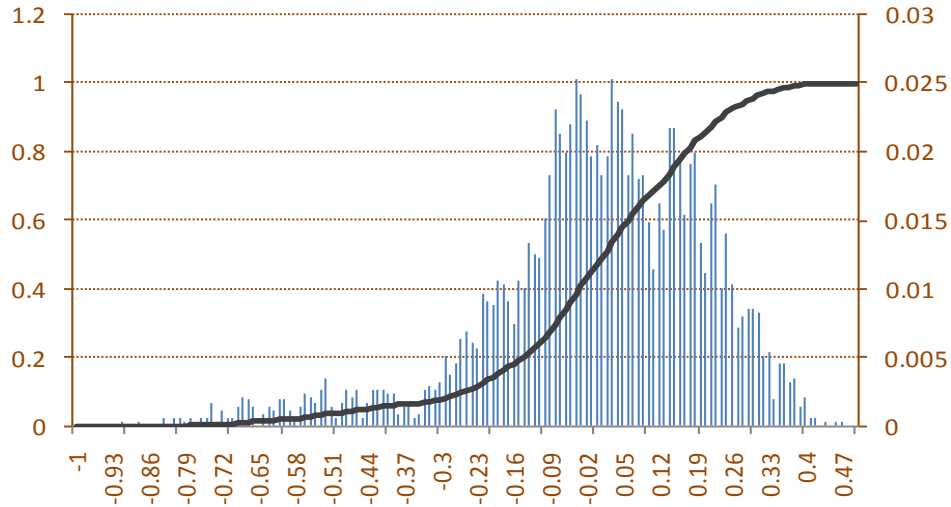


Gráfico 7. Distribución Histórica de los Rendimientos Agregados del Portafolio Homogéneo. La línea es la función de distribución y las barras son la función de densidad.

El gráfico 7 presenta la función de distribución histórica de los rendimientos agregados (que describe el comportamiento promedio de los mismos). En la gráfica se puede apreciar la presencia de colas anchas en el lado izquierdo de la distribución. Esta distribución se toma como punto de referencia para contrastar los resultados empíricos de las funciones resultantes de la simulación.

Como se mencionó al final de la sección anterior, la ecuación que queremos estimar es la siguiente:

$$P(D_p = 1) = P(r_{p,t+T} \leq d) = E \left( \Phi \left( \frac{d - \beta_{m1} r_{m1,t+T} - \beta_{m2} r_{m2,t+T}}{\sqrt{\sum_i^n \left( \frac{T}{n^2} \right) \sigma_i^2}} \right) \right)$$

La forma recursiva de las ecuaciones DCC y TARARCH nos permite simular los rendimientos condicionales de los factores T=100 días en el futuro empleando números normales bivariados. Los pesos de los factores son el promedio ponderado (de acuerdo a los pesos de los activos en el portafolio) estimados anteriormente.

El umbral  $d$  puede calibrarse de acuerdo a la experiencia del portafolio en particular. Para efectos de este estudio se varía el umbral en el dominio de los eventos de probabilidad positiva.

Se realizan  $k=3,000$  simulaciones a 100 días para los factores tomando como punto inicial distintos períodos de interés: principios de enero de 1995 (crisis financiera con origen en México), principios de enero de 2007 (período previo a la crisis de 2007/2009), principios de enero de 2008 (los mercados financieros empiezan a mostrar cierta inquietud pero aún es incipiente) y principios de noviembre de 2008 (la crisis de 2007/2009 en pleno).

Una vez que tenemos los estimados de los rendimientos agregados del portafolio podemos estimar la ecuación de interés de la siguiente manera:

$$\frac{1}{3,000} \sum_{k=1}^{3,000} \Phi \left( \frac{d - \beta_{m1} r_{m1,t \rightarrow T}^{(k)} - \beta_{m2} r_{m2,t \rightarrow T}^{(k)}}{\sqrt{\sum_i^n \left(\frac{T}{n^2}\right) \sigma_i^2}} \right) = p$$

En cada simulación  $k$  se obtienen los rendimientos para los siguientes 100 días, los cuales se agregan y multiplican por los pesos correspondientes. Para cada probabilidad  $p$  se determina el umbral  $d_p$  que satisface la igualdad.

Para cada uno de los posibles períodos iniciales se simula una función de distribución. También se estima el modelo análogo que emplea sólo un factor en la especificación de la ecuación de rendimientos y que por tanto no emplea la dinámica DCC entre factores, pero que sí emplea la dinámica TARARCH para las volatilidades del factor único (IPC).

Los resultados de las simulaciones son presentados en los gráficos 8 y 9. Se superponen las funciones de distribución para poder apreciar la cola izquierda de la distribución.



### Función de Distribución de los Rendimientos del Portafolio 2 Factores (DCC, TARCH)

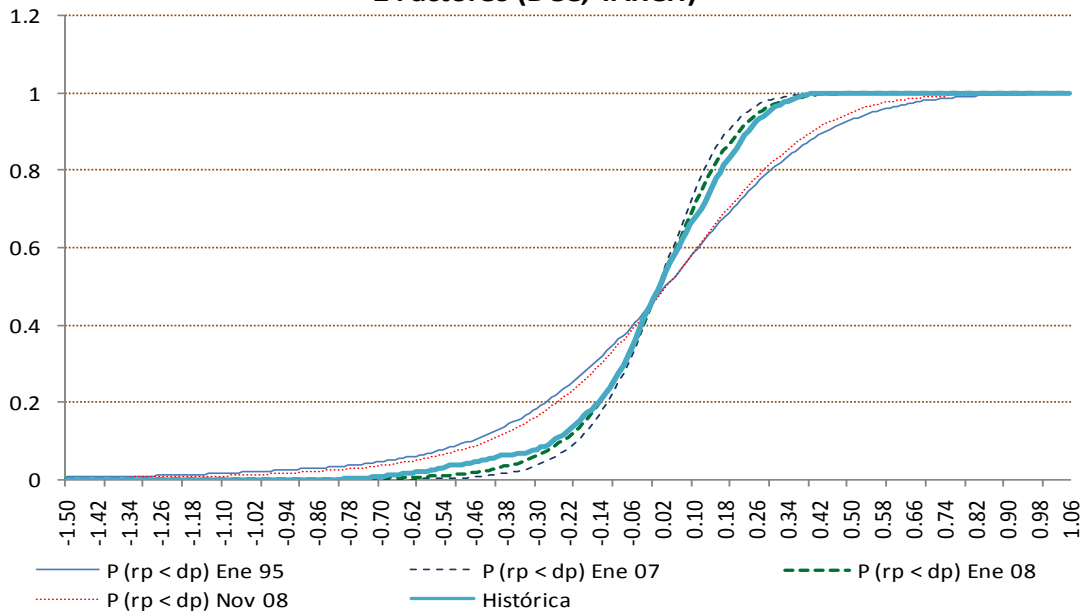


Gráfico 8. Distribuciones de los Rendimientos Agregados del Portafolio: Modelo de dos factores. El eje horizontal representa los distintos umbrales  $d_p$ .

### Función de Distribución de los Rendimientos del Portafolio 1 Factor (TARCH)

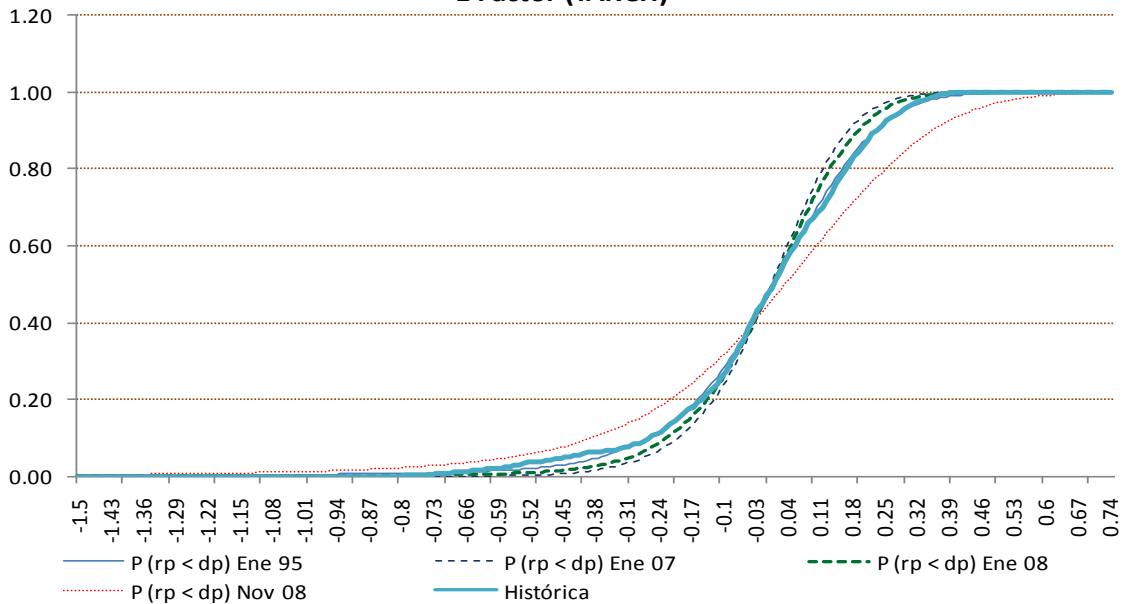


Gráfico 9. Distribuciones de los Rendimientos Agregados del Portafolio: Modelo de un factor. El eje horizontal representa los distintos umbrales  $d_p$ .

<b>2 Factores</b>	<b>Ene-95</b>	<b>Ene-07</b>	<b>Ene-08</b>	<b>Nov-08</b>	<b>Histórica</b>
<b>Media</b>	-0.002256	-1.66E-05	0.002489	0.0000108	-0.006078
<b>Mediana</b>	0.033251	0.012675	0.019406	0.031559	0.014224
<b>Máximo</b>	1.62541	0.414343	0.59832	1.229688	0.460675
<b>Mínimo</b>	-3.225204	-0.929032	-0.864387	-2.66707	-0.914823
<b>Desv. Est.</b>	0.390286	0.140744	0.170859	0.350231	0.213355
<b>Sesgo</b>	-1.222086	-0.782308	-0.698814	-1.094789	-0.973208
<b>Curtosis</b>	8.690101	4.913408	4.427814	6.965433	4.463431
<b>No. Obs.</b>	3,000	3,000	3,000	3,000	3,762

Cuadro 6. Rendimientos Agregados del Portafolio. Modelo de 2 Factores.

En el gráfico 8 y cuadro 6, la función de distribución del modelo de dos factores que tiene como punto inicial enero de 1995 presenta una cola más ancha que la distribución histórica. La distribución de noviembre de 2008 presenta una cola muy similar a la de enero de 1995. Las colas de enero de 2007 y de enero de 2008 son muy similares entre sí y están por debajo del comportamiento promedio histórico. Los resultados anteriores son consistentes con la historia de los rendimientos y con el hecho estilizado de una mayor acumulación de rendimientos en la cola izquierda de la distribución.

<b>1 Factor</b>	<b>Ene-95</b>	<b>Ene-07</b>	<b>Ene-08</b>	<b>Nov-08</b>	<b>Histórica</b>
<b>Media</b>	-0.001512	-0.002377	-0.00228	0.003353	-0.006078
<b>Mediana</b>	0.019765	0.01145	0.018551	0.041925	0.014224
<b>Máximo</b>	0.588762	0.342695	0.480163	1.063976	0.460675
<b>Mínimo</b>	-1.527965	-0.907141	-1.382745	-3.584225	-0.914823
<b>Desv. Est.</b>	0.195849	0.135519	0.159143	0.324941	0.213355
<b>Sesgo</b>	-1.210356	-0.896334	-1.10221	-1.680827	-0.973208
<b>Curtosis</b>	7.554042	5.280867	7.244025	11.70214	4.463431
<b>No. Obs.</b>	3,000	3,000	3,000	3,000	3,762

Cuadro 7. Rendimientos Agregados del Portafolio. Modelo de 1 Factor.

Por otro lado, en el gráfico 9 y cuadro 7, las funciones de distribución de un solo factor presentan un comportamiento similar a las de dos factores con excepción de la correspondiente a enero de 1995, en la que se describe una cola menos ancha que la del modelo de dos factores para el mismo período.

## V. Conclusiones

Se propone una especificación de dos factores, uno local y uno global, para la evaluación del riesgo de crédito de portafolios en mercados en desarrollo integrados a un mercado global o regional. El modelo se plantea para un portafolio de pesos iguales pero permitiendo heterogeneidad en el peso de los factores y en las volatilidades idiosincráticas. Los factores siguen una dinámica DCC para las correlaciones y TARARCH para las volatilidades. Esta estructura permite simular la función de rendimientos agregados del portafolio T días en el futuro. El modelo se estima para 10 acciones de la Bolsa Mexicana de Valores y un período de agregación en el futuro de 100 días. Los resultados son consistentes con los hechos estilizados de una mayor dependencia en la cola inferior de la distribución de rendimientos y de exceso de kurtosis en períodos de crisis económicas. El modelo de un factor captura un comportamiento similar de los rendimientos agregados, a excepción de la función de distribución de enero de 1995, período para el cual la especificación de dos factores captura colas más anchas.

A diferencia de los modelos tradicionales para la evaluación del riesgo de crédito, el modelo propuesto incorpora la información generada día a día de forma condicional, lo cual permite tener una estimación del riesgo más actualizada.

El modelo puede extenderse a una especificación de los rendimientos con betas y volatilidades idiosincráticas variantes en el tiempo y que considere la posible existencia de factores latentes omitidos. Esto permitiría un análisis más cercano del riesgo de largo plazo de un portafolio de activos. En el presente trabajo se opta por un modelo más parsimonioso.

## **Bibliografía**

Altman, E. (1968). “Financial Ratios, Discriminant Analysis and Prediction of Corporate Banruptcy”. *Journal of Finance*, Vol. 23, No. 4, pp. 589-609.

Basel Committee on Banking Supervision (1999). “Credit Risk Modelling: Current Practices and Applications”. Publicaciones, abril.

Berd, A., R. Engle y A. Voronov (2007). “The Underlying Dynamics of Credit Correlations”. *Journal of Credit Risk*, Vol. 3, No. 2, pp. 27-62.

Bielecki, T. y R. Rutkowski (2002). *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*. Springer.

Bollerslev, T. (1990). “Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: a Multivariate Generalized ARCH Model”. *Review of Economics and Statistics*, Vol. 72, No. 3, pp. 498-505.

Bollerslev, T., R. Engle y J. Wooldridge (1988). “A Capital-Asset Pricing Model with Time Varying Covariances”. *Journal of Political Economy*, Vol. 96, No. 1, pp. 116-131.

Caouette, J., E. Altman, P. Narayanan y R. Nimmo (2008). *Managing Credit Risk: The Great Challenge for Global Financial Markets*. Wiley Finance.

Credit Suisse / First Boston (1997), “CreditRisk<sup>+</sup>: A Credit Risk Management Framework”.

De Lara Haro, A. *Medición y control de riesgos financieros*. Limusa.

Elizondo, A. (2003). Coordinador. *Medición Integral del Riesgo de Crédito*. Limusa.

Enders, W. (2004). *Applied Econometric Time Series*. John Wiley and Sons.

Engle, R. (2009). *Anticipating Correlations: A New Paradigm for Risk Management*. Princeton University Press.

Engle, R. (2002). “Dynamic Conditional Correlation: a Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models”. *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 20, No. 3, pp. 339-350.

Engle, R. y J. Rangel (2011). “The Factor-Spline-GARCH Model for High and Low Frequency Correlations”. *Journal of Business and Economic Statistics*, próximo a publicarse.

Engle, R. y K. Sheppard (2008). “Evaluating the Specification of Covariance Models for Large Portfolios”. *Working Paper*, University of Oxford.

Engle, R. y K. Sheppard (2001). “Theoretical and Empirical properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH”. *NYU Working Papers*, No. S-DRP-01-10.

Gordy M. (2000). “A Comparative Anatomy of Credit Risk Models”. *Journal of Banking and Finance*, Vol. 24, No. 1-2, pp. 119-149.

Hafner, C. y O. Linton (2010). “Efficient Estimation of a Multivariate Multiplicative Volatility Model”. *Journal of Econometrics*, Vol. 159, No. 1, pp. 55-73.

Hamilton, J. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.

J. P. Morgan, G. Gupton, C. Finger y M. Bathia (1997). “CreditMetrics - Technical Document”. *J.P. Morgan & Co.*

Ling, S. y M. McAleer (2002). “Stationarity and the Existence of Moments of a Family of GARCH Processes”. *Journal of Econometrics*, Vol. 106, No. 1, pp. 109-117.

Markowitz, H. (1952). “Portfolio Selection”. *Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91.

Márquez, J. (2002). “Suficiencia de Capital y Riesgo de Crédito en Carteras de Préstamos Bancarios”. *Serie Documentos de Investigación*, Banco de México, documento No.2002-4.

Márquez, J. (2006). *Una Nueva Visión del Riesgo de Crédito*. Limusa.

McNeil, A., R. Frey y P. Embrechts (2005). *Quantitative Risk Management*. Princeton Series in Finance, Princeton University Press.

Merton, R. (1974). "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates". *Journal of Finance*, Vol. 29, No. 2, pp. 449-470.

Rangel, J. (2009). *Notas de clase del Curso de Econometría Financiera*. El Colegio de México.

Ross, S. (1976). "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing". *Journal of Economic Theory*, Vol. 13, No. 3, pp. 341-360.

Sharpe, W. (1964). "Capital Asset Prices - A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk". *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, pp. 425-442.

Silvennoinen, A. y T. Teräsvirta (2009). "Multivariate GARCH Models". *Handbook of Financial Time Series*, Springer, Parte 1, pp. 201-229.

## ANEXO: Análisis de Componentes Principales

La técnica de componentes principales es muy útil para analizar sistemas altamente correlacionados, como en el caso del IPC y el S&P 500. Los altos niveles de correlación que pueden apreciarse en el gráfico 1 se traducen en problemas de colinealidad de los factores al momento de hacer las regresiones de los rendimientos individuales.

A pesar de que los componentes principales son ortogonales, la presencia de una fuerte correlación entre los factores fundamentales va a resultar en una componente principal muy “dominante”. Para visualizar esto, recordemos que la variación en los factores explicada por el componente principal  $i$  se obtiene mediante el cociente de eigen-valores:

$$VarExplicada_{CP_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}$$

Podemos calcular este cociente de una forma muy sencilla, haciendo cualquiera de los siguientes supuestos simplificadores:

$$\begin{aligned} \sigma_{\perp IPC,t}^2 &= \sigma_{SP500,t}^2 = \sigma_t^2 \\ \text{ó} \\ \sigma_{\perp IPC,t}^2 &= \sigma_{SP500,t}^2 = \sigma_t^2 \end{aligned}$$

De tal forma que:

$$H_t = D_t R_t D_t = \begin{pmatrix} \sigma_{\perp IPC,t}^2 & \sigma_{\perp IPC,t} \sigma_{SP500,t} \rho_t \\ \sigma_{\perp IPC,t} \sigma_{SP500,t} \rho_t & \sigma_{SP500,t}^2 \end{pmatrix} = \sigma_t^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho_t \\ \rho_t & 1 \end{pmatrix} = \sigma_t^2 R_t$$

Esta simplificación es equivalente a trabajar con los rendimientos estandarizados y su respectiva matriz de varianzas y covarianzas que, como ya se vió, es la matriz de correlaciones  $R_t$ .



Los eigen-valores de  $H_t$  son  $(1+\rho_t)\sigma_t$  y  $(1-\rho_t)\sigma_t$ , por lo que los respectivos cocientes de eigenvalores serán:

$$VarExplicada_{CP_{1,t}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{(1+\rho_t)\sigma_t^2}{(1+\rho_t)\sigma_t^2 + (1-\rho_t)\sigma_t^2} = \frac{1}{2}(1+\rho_t)$$

$$VarExplicada_{CP_{2,t}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{(1-\rho_t)\sigma_t^2}{(1+\rho_t)\sigma_t^2 + (1-\rho_t)\sigma_t^2} = \frac{1}{2}(1-\rho_t)$$

En los gráficos A y B podemos ver el comportamiento en el tiempo de estos cocientes antes y después de la ortogonalización del IPC.

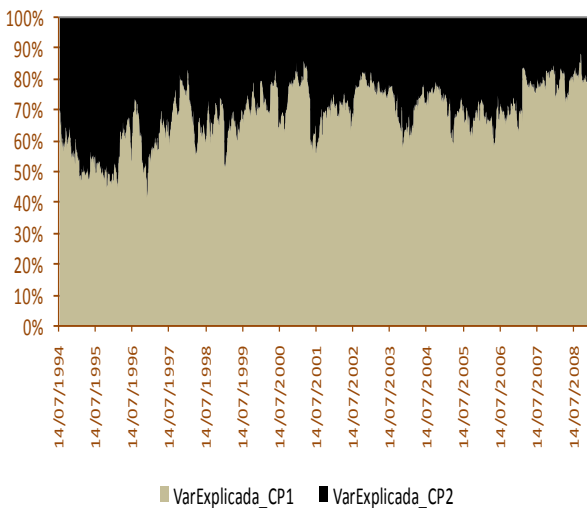


Gráfico A. Variación en los Factores Fundamentales Explicada por los Componentes Principales antes de la ortogonalización del IPC.

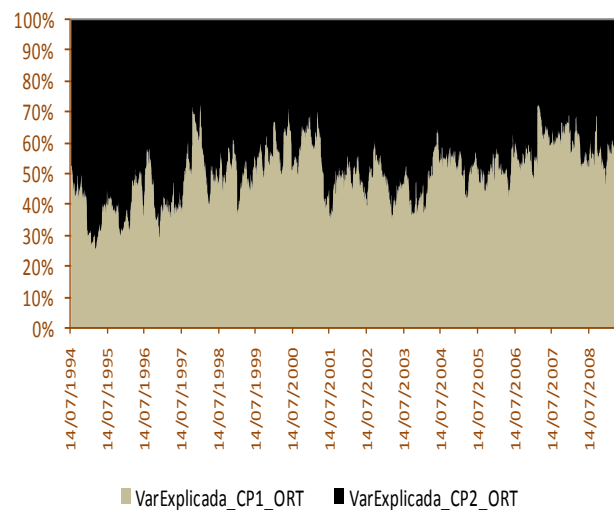


Gráfico B. Variación en los Factores Fundamentales Explicada por los Componentes Principales después de la ortogonalización del IPC.

A medida que el valor absoluto de las correlaciones entre factores fundamentales baja, el poder explicativo de los factores estadísticos va a estar más balanceado. Es decir, después de ortogonalizar el IPC existe mayor evidencia de un modelo de dos factores explicativos bien balanceados desde el enfoque de componentes principales.